

Miejsce  
na naklejkę  
z kodem szkoły

dysleksja

MMA-R1A1P-062

# EGZAMIN MATURALNY Z MATEMATYKI

Arkusz II

**POZIOM ROZSZERZONY**

**Czas pracy 150 minut**

## Instrukcja dla zdającego

1. Sprawdź, czy arkusz egzaminacyjny zawiera 14 stron (zadania 12 – 21). Ewentualny brak zgłoś przewodniczącemu zespołu nadzorującego egzamin.
2. Rozwiązania zadań i odpowiedzi zamieść w miejscu na to przeznaczonym.
3. W rozwiązaniach zadań przedstaw tok rozumowania prowadzący do ostatecznego wyniku.
4. Pisz czytelnie. Używaj długopisu/pióra tylko z czarnym tuszem/atramentem.
5. Nie używaj korektora, a błędne zapisy przekreśl.
6. Pamiętaj, że zapisy w brudnopisie nie podlegają ocenie.
7. Obok każdego zadania podana jest maksymalna liczba punktów, którą możesz uzyskać za jego poprawne rozwiązanie.
8. Możesz korzystać z zestawu wzorów matematycznych, cyrkla i linijki oraz kalkulatora.
9. Wypełnij tę część karty odpowiedzi, którą koduje zdający. Nie wpisuj żadnych znaków w części przeznaczonej dla egzaminatora.
10. Na karcie odpowiedzi wpisz swoją datę urodzenia i PESEL. Zamaluj  pola odpowiadające cyfrom numeru PESEL. Błędne zaznaczenie otocz kółkiem  i zaznacz właściwe.

ARKUSZ II

MAJ  
ROK 2006

Za rozwiązanie  
wszystkich zadań  
można otrzymać  
łącznie  
**50 punktów**

*Życzymy powodzenia!*

Wypełnia zdający przed  
rozpoczęciem pracy

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

PESEL ZDAJĄCEGO

--	--	--

KOD  
ZDAJĄCEGO

**Zadanie 12. (5 pkt)**

Korzystając z zasady indukcji matematycznej wykaż, że dla każdej liczby naturalnej  $n \geq 1$  prawdziwy jest wzór:  $1 \cdot 3 \cdot (1!)^2 + 2 \cdot 4 \cdot (2!)^2 + \dots + n(n+2)(n!)^2 = [(n+1)!]^2 - 1$ .

*Sprawdzam, czy wzór jest prawdziwy dla  $n = 1$ :*

$$L = 1 \cdot 3 \cdot 1! \quad P = (2!)^2 - 1$$

$$L = P$$

*Założenie indukcyjne:*

$$1 \cdot 3 \cdot (1!)^2 + 2 \cdot 4 \cdot (2!)^2 + \dots + n(n+2)(n!)^2 = [(n+1)!]^2 - 1 \quad \text{dla } n \geq 1.$$

*Teza:*

$$1 \cdot 3 \cdot (1!)^2 + 2 \cdot 4 \cdot (2!)^2 + \dots + n(n+2)(n!)^2 + (n+1)(n+3)[(n+1)!]^2 = [(n+2)!]^2 - 1$$

*Dowód:*

*Korzystam z założenia indukcyjnego i otrzymuję*

$$\begin{aligned} L &= [(n+1)!]^2 - 1 + (n+1)(n+3)[(n+1)!]^2 = \\ &= [(n+1)!]^2 + (n+1)(n+3)[(n+1)!]^2 - 1. \end{aligned}$$

*Wylączę z pierwszych dwóch składników wyrażenia wspólny czynnik*

*$[(n+1)!]^2$  przed nawias:*

$$\begin{aligned} L &= [(n+1)!]^2 \cdot [1 + (n+1)(n+3)] - 1 = [(n+1)!]^2 \cdot (n^2 + 4n + 4) - 1 = \\ &= [(n+1)!]^2 \cdot (n+2)^2 - 1. \end{aligned}$$

*Korzystam z równości:  $(n+1)!(n+2) = (n+2)!$  i otrzymuję*

$$L = [(n+1)!(n+2)]^2 - 1 = [(n+2)!]^2 - 1 = P.$$

*wniosek: Z zasady indukcji matematycznej wynika, że wzór jest prawdziwy dla każdej liczby naturalnej  $n \geq 1$ .*

Wypełnia egzaminator!	Nr czynności	12.1.	12.2.	12.3.	12.4.	12.5.
	Maks. liczba pkt	1	1	1	1	1
	Uzyskana liczba pkt					

**Zadanie 13. (5 pkt)**

Dany jest ciąg  $(a_n)$ , gdzie  $a_n = \frac{5n+6}{10(n+1)}$  dla każdej liczby naturalnej  $n \geq 1$ .

- Zbadaj monotoniczność ciągu  $(a_n)$ .
- Oblicz  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ .
- Podaj największą liczbę  $a$  i najmniejszą liczbę  $b$  takie, że dla każdego  $n$  spełniony jest warunek  $a \leq a_n \leq b$ .

a)

*Aby określić monotoniczność ciągu obliczam różnicę  $a_{n+1} - a_n$ .*

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= \frac{5n+11}{10(n+2)} - \frac{5n+6}{10(n+1)} = \\ &= \frac{(5n+11)(n+1) - (5n+6)(n+2)}{10(n+1)(n+2)} = \\ &= \frac{5n^2 + 5n + 11n + 11 - 5n^2 - 10n - 6n - 12}{10(n+1)(n+2)} = \\ &= \frac{-1}{10(n+1)(n+2)} \end{aligned}$$

$$\frac{-1}{10(n+1)(n+2)} < 0 \text{ dla każdej liczby naturalnej, zatem ciąg jest malejący.}$$

b)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n+6}{10(n+1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n+6}{10n+10} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5 + \frac{6}{n}}{10 + \frac{10}{n}} = \frac{1}{2}$$

c)

*Ciąg jest malejący, więc najmniejszą liczbą, która spełnia nierówność  $a_n \leq b$*

*jest pierwszy wyraz tego ciągu, czyli  $b = \frac{11}{20}$ , natomiast największą liczbą*

*spełniającą nierówność  $a \leq a_n$  jest granica tego ciągu, czyli  $a = \frac{1}{2}$ .*

Wypełnia egzaminator!	Nr czynności	13.1.	13.2.	13.3.	13.4.	13.5.
	Maks. liczba pkt	1	1	1	1	1
	Uzyskana liczba pkt					

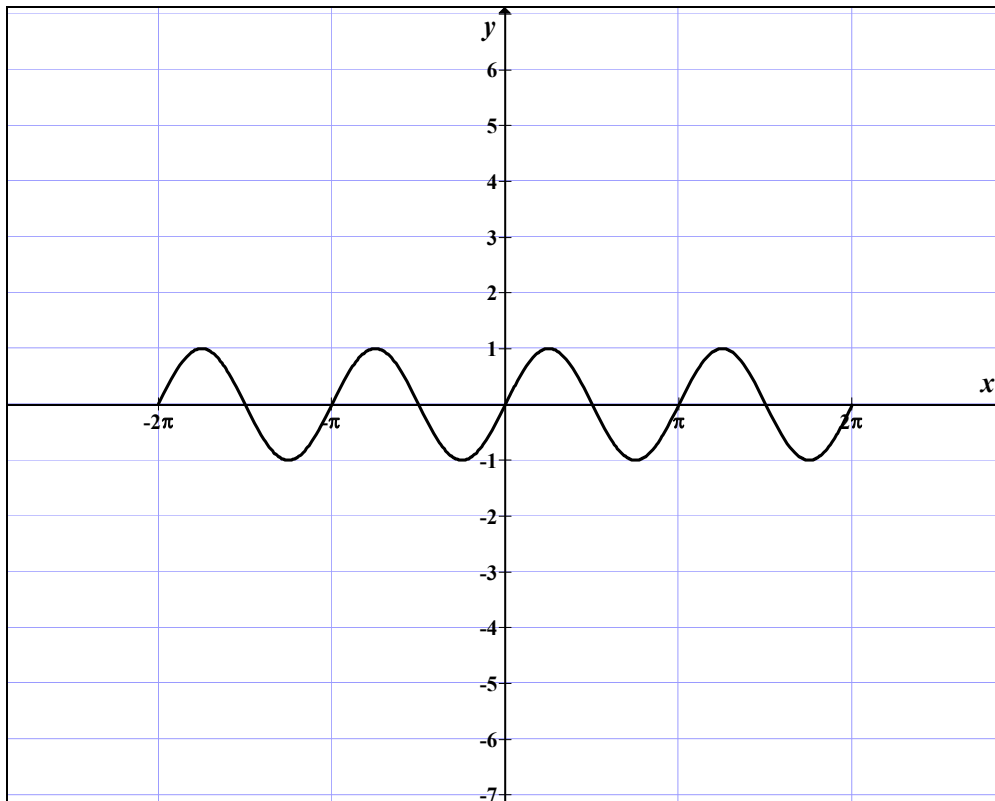
**Zadanie 14. (4 pkt)**

a) Narysuj wykres funkcji  $y = \sin 2x$  w przedziale  $\langle -2\pi, 2\pi \rangle$ .

b) Narysuj wykres funkcji  $y = \frac{|\sin 2x|}{\sin 2x}$  w przedziale  $\langle -2\pi, 2\pi \rangle$

i zapisz, dla których liczb z tego przedziału spełniona jest nierówność  $\frac{|\sin 2x|}{\sin 2x} < 0$ .

a)



b)

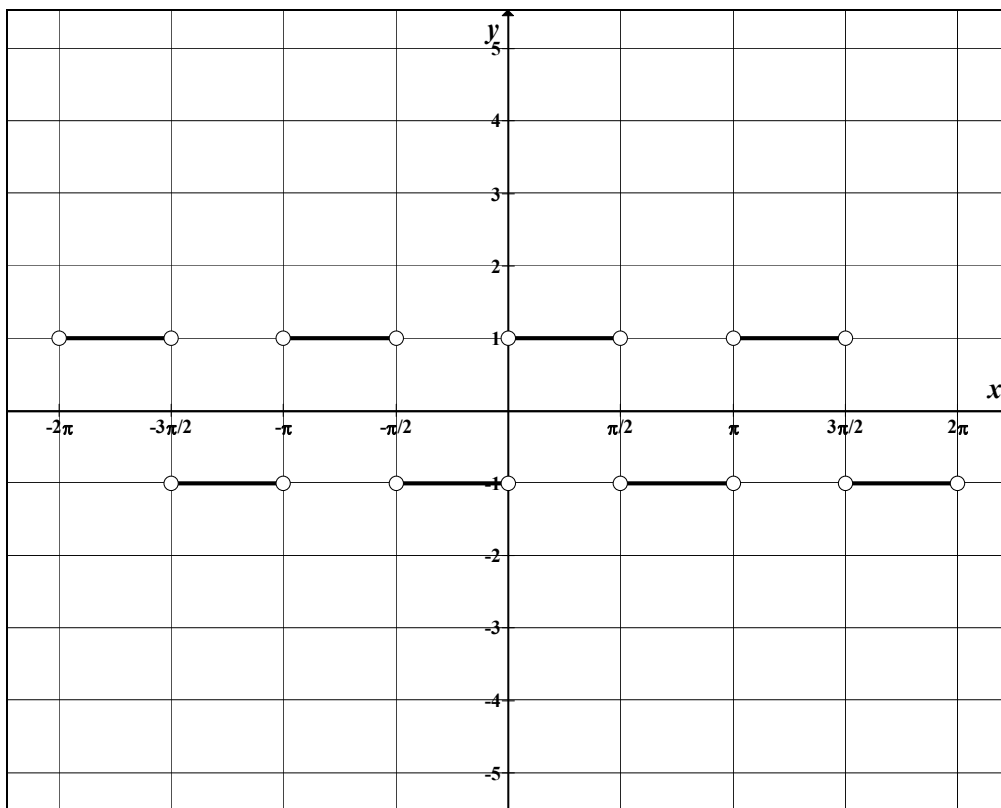
Wyznaczam dziedzinę funkcji  $y = \frac{|\sin 2x|}{\sin 2x}$ :

$$\sin 2x \neq 0 \text{ dla } x \neq \frac{k\pi}{2}.$$

Przekształcam wzór funkcji:

$$y = \frac{|\sin 2x|}{\sin 2x} = \begin{cases} 1 & \text{dla } \sin 2x > 0 \\ -1 & \text{dla } \sin 2x < 0 \end{cases}$$

$$y = \begin{cases} 1 & \text{dla } x \in \left(-2\pi, -\frac{3\pi}{2}\right) \cup \left(-\pi, -\frac{\pi}{2}\right) \cup \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right) \\ -1 & \text{dla } x \in \left(-\frac{3\pi}{2}, -\pi\right) \cup \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right) \cup \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right) \end{cases}$$



*Odp.: Rozwiązaniem nierówności  $\frac{|\sin 2x|}{\sin 2x} < 0$*

*jest zbiór:  $\left(-\frac{3\pi}{2}, -\pi\right) \cup \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right) \cup \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$ .*

Wypełnia egzaminator!	Nr czynności	14.1.	14.2.	14.3.	14.4.
	Maks. liczba pkt	1	1	1	1
	Uzyskana liczba pkt				

**Zadanie 15. (4 pkt)**

Uczniowie dojeżdżający do szkoły zaobserwowali, że spóźnienie autobusu zależy od tego, który z trzech kierowców prowadzi autobus. Przeprowadzili badania statystyczne i obliczyli, że w przypadku, gdy autobus prowadzi kierowca A, spóźnienie zdarza się w 5% jego kursów, gdy prowadzi kierowca B w 20% jego kursów, a gdy prowadzi kierowca C w 50% jego kursów. W ciągu 5-dniowego tygodnia nauki dwa razy prowadzi autobus kierowca A, dwa razy kierowca B i jeden raz kierowca C. Oblicz prawdopodobieństwo spóźnienia się szkolnego autobusu w losowo wybrany dzień nauki.

*Wprowadzam następujące oznaczenia zdarzeń:*

*A - autobus prowadzi kierowca A,*

*B - autobus prowadzi kierowca B,*

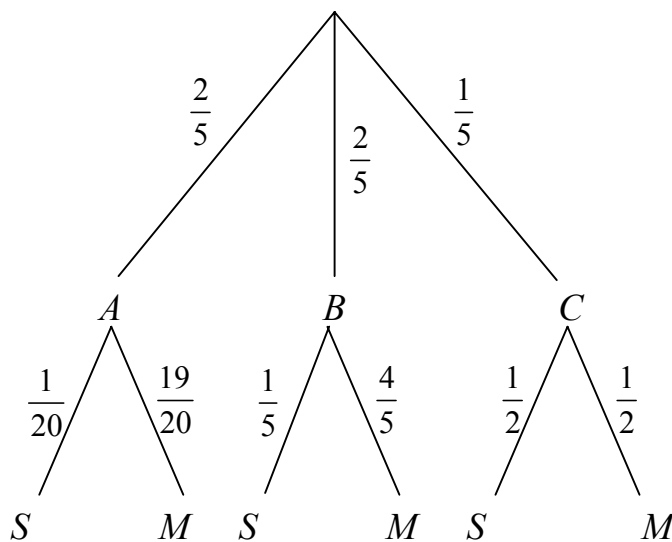
*C - autobus prowadzi kierowca C,*

*S - autobus szkolny spóźnia się,*

*M - autobus przyjeżdża punktualnie.*

*Zdarzenia A, B, C spełniają założenia twierdzenia o prawdopodobieństwie całkowitym, więc:*

$$P(S) = P(S|A) \cdot P(A) + P(S|B) \cdot P(B) + P(S|C) \cdot P(C).$$



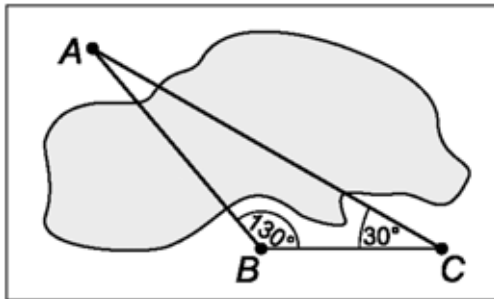
*Obliczam prawdopodobieństwo:*

$$P(S) = \frac{1}{20} \cdot \frac{2}{5} + \frac{1}{5} \cdot \frac{2}{5} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{5}.$$

Wypełnia egzaminator!	Nr czynności	15.1.	15.2.	15.3.	15.4.
	Maks. liczba pkt	1	1	1	1
	Uzyskana liczba pkt				

**Zadanie 16. (3 pkt)**

Obiekty  $A$  i  $B$  leżą po dwóch stronach jeziora. W terenie dokonano pomiarów odpowiednich kątów i ich wyniki przedstawiono na rysunku. Odległość między obiektami  $B$  i  $C$  jest równa 400 m. Oblicz odległość w linii prostej między obiektami  $A$  i  $B$  i podaj wynik, zaokrąglając go do jednego metra.



$|\sphericalangle CAB| = 20^\circ$ , ponieważ suma kątów w trójkącie jest równa  $180^\circ$ .

Do wyznaczenia szukanej odległości stosuję twierdzenie sinusów:

$$\frac{|AB|}{\sin 30^\circ} = \frac{400}{\sin 20^\circ}.$$

Obliczam odległość obiektu  $A$  od obiektu  $B$ :

$$|AB| = \frac{200}{\sin 20^\circ} \approx \frac{200}{0,342} \approx 584,8$$

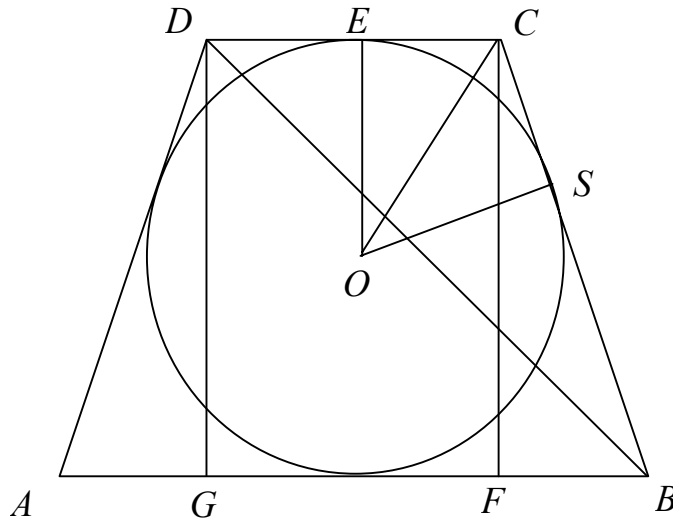
Od.: Odległość obiektów w linii prostej jest równa 585 metrów.

Wypełnia egzaminator!	Nr czynności	16.1.	16.2.	16.3.
	Maks. liczba pkt	1	1	1
	Uzyskana liczba pkt			

**Zadanie 17. (6 pkt)**

Na okręgu o promieniu  $r$  opisano trapez równoramienny  $ABCD$  o dłuższej podstawie  $AB$  i krótszej  $CD$ . Punkt styczności  $S$  dzieli ramię  $BC$  tak, że  $\frac{|CS|}{|SB|} = \frac{2}{5}$ .

- a) Wyznacz długość ramienia tego trapezu.  
b) Oblicz cosinus  $|\sphericalangle CBD|$ .



Przyjmuję oznaczenia jak na rysunku.

a) Wykorzystując proporcję  $\frac{|CS|}{|SB|} = \frac{2}{5}$  wprowadzam oznaczenia:

$$|CS| = 2x, \quad |SB| = 5x, \quad \text{stąd} \quad |BC| = 2x + 5x = 7x.$$

$$\triangle OSC \equiv \triangle OEC \quad \text{więc} \quad |EC| = |CS| = 2x.$$

$$|DC| = 4x \quad - \text{z własności trapezu równoramiennego.}$$

Korzystając z własności czworokąta opisanego na okręgu otrzymuję:

$$|AB| + |CD| = 2 \cdot |BC| = 14x, \quad \text{stąd} \quad |AB| = 10x.$$

Z własności trapezu równoramiennego wynika, że  $|FB| = 3x$ .

Z twierdzenia Pitagorasa dla  $\triangle FBC$  otrzymuję:

$$|CF|^2 + |FB|^2 = |CB|^2, \quad \text{czyli} \quad (2r)^2 + (3x)^2 = (7x)^2, \quad r^2 = 10x^2, \quad \text{stąd} \quad x = \frac{\sqrt{10}}{10}r,$$

$$\text{więc} \quad |BC| = \frac{7\sqrt{10}}{10}r, \quad |DC| = \frac{4\sqrt{10}}{10}r.$$



b)

Wyznaczam długość przekątnej  $BD$  z trójkąta prostokątnego  $BDG$ , w którym

$$|GB| = \frac{7\sqrt{10}}{10}r :$$

$$|GB|^2 + |GD|^2 = |DB|^2,$$

$$|DB|^2 = \frac{490r^2}{100} + 4r^2 = \frac{490r^2 + 400r^2}{100}, \text{ stąd } |BD| = \frac{\sqrt{890}}{10}r.$$

Stosując twierdzenie cosinusów w trójkącie  $BCD$  otrzymuję:

$$|DC|^2 = |BC|^2 + |DB|^2 - 2 \cdot |BC| \cdot |DB| \cdot \cos|\sphericalangle CBD|,$$

$$\left(\frac{4\sqrt{10}}{10}r\right)^2 = \left(\frac{7\sqrt{10}}{10}r\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{890}}{10}r\right)^2 - 2 \cdot \frac{7\sqrt{10}}{10}r \cdot \frac{\sqrt{890}}{10}r \cdot \cos|\sphericalangle CBD|.$$

$$\text{Odp.: } \cos|\sphericalangle CBD| = \frac{61\sqrt{89}}{623}.$$

Wypełnia egzaminator!	Nr czynności	17.1.	17.2.	17.3.	17.4.	17.5.	17.6.
	Maks. liczba pkt	1	1	1	1	1	1
	Uzyskana liczba pkt						

**Zadanie 18. (7 pkt)**

Wśród wszystkich graniastosłupów prawidłowych trójkątnych o objętości równej  $2 \text{ m}^3$  istnieje taki, którego pole powierzchni całkowitej jest najmniejsze. Wyznacz długości krawędzi tego graniastoslupa.

*Wprowadzam następujące oznaczenia:*

*$a$  – długość krawędzi podstawy,  $h$  – wysokość graniastoslupa.*

*Dla tak wprowadzonych oznaczeń wzory na objętość i pole powierzchni całkowitej graniastoslupa są następujące:*

$$V = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} h, \quad P = \frac{a^2 \sqrt{3}}{2} + 3ah.$$

*Z równania  $\frac{a^2 \sqrt{3}}{4} h = 2$  wyznaczam niewiadomą  $h$ :  $h = \frac{8\sqrt{3}}{3a^2}$ .*

*Po podstawieniu  $h$  do wzoru na pole powierzchni całkowitej graniastoslupa otrzymuję funkcję:*

$$P(a) = \frac{a^2 \sqrt{3}}{2} + 3a \cdot \frac{8\sqrt{3}}{3a^2} = \frac{a^3 \sqrt{3} + 16\sqrt{3}}{2a} = \frac{\sqrt{3}}{2} \left( a^2 + \frac{16}{a} \right), \quad a \in (0, \infty).$$

*Obliczam pochodną funkcji:  $P'(a) = \sqrt{3} \cdot \frac{a^3 - 8}{a^2}$ ,  $a \in (0, \infty)$ .*

*Dla  $a = 2$  pochodna funkcji przyjmuje wartość 0.*

*$P'(a) \leq 0$  dla  $a \in (0, 2)$  i  $P'(a) \geq 0$  dla  $a \in (2, \infty)$ , więc w punkcie  $a = 2$*

*funkcja  $P$  osiąga minimum i jednocześnie wartość najmniejszą, bo funkcja  $P$  w przedziale  $(0, 2)$  jest malejąca i w przedziale  $(2, \infty)$  jest rosnąca.*

*Dla  $a = 2$  wysokość  $h = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ .*

*Odp.: Wymiary graniastoslupa o objętości  $2 \text{ m}^3$ , dla którego pole powierzchni całkowitej jest najmniejsze są następujące:  $a = 2 \text{ m}$ ,  $h = \frac{2\sqrt{3}}{3} \text{ m}$ .*

Wypełnia egzaminator!	Nr czynności	18.1.	18.2.	18.3.	18.4.	18.5.	18.6.	18.7.
	Maks. liczba pkt	1	1	1	1	1	1	1
	Uzyskana liczba pkt							

**Zadanie 19. (7 pkt)**

Nieskończony ciąg geometryczny  $(a_n)$  jest zdefiniowany wzorem rekurencyjnym:  $a_1 = 2$ ,  $a_{n+1} = a_n \cdot \log_2(k-2)$ , dla każdej liczby naturalnej  $n \geq 1$ . Wszystkie wyrazy tego ciągu są różne od zera. Wyznacz wszystkie wartości parametru  $k$ , dla których istnieje suma wszystkich wyrazów nieskończonego ciągu  $(a_n)$ .

*Wyrażenie:  $\log_2(k-2)$  jest określone, gdy  $k-2 > 0 \Leftrightarrow k > 2$ .*

*Z definicji ciągu geometrycznego wynika, że iloraz  $q = \log_2(k-2)$ .*

*$q \neq 0 \Leftrightarrow \log_2(k-2) \neq 0$  czyli  $k \neq 3$ .*

*Aby istniała suma wszystkich wyrazów danego ciągu geometrycznego, iloraz ciągu musi spełniać warunek  $|q| < 1 \Leftrightarrow |\log_2(k-2)| < 1$ .*

*Rozwiązuję nierówność:  $|\log_2(k-2)| < 1$ ,*

$$\log_2(k-2) > -1 \quad i \quad \log_2(k-2) < 1$$

$$\log_2(k-2) > \log_2 \frac{1}{2} \quad i \quad \log_2(k-2) < \log_2 2$$

$$k-2 > \frac{1}{2} \quad i \quad k-2 < 2$$

$$k > \frac{5}{2} \quad i \quad k < 4$$

*Rozwiązaniem nierówności są liczby rzeczywiste należące do przedziału  $\left(\frac{5}{2}, 4\right)$ .*

*Odp.: Suma wszystkich wyrazów danego ciągu o wszystkich wyrazach różnych*

*od zera istnieje dla  $k \in \left(\frac{5}{2}, 3\right) \cup (3, 4)$ .*

Wypełnia egzaminator!	Nr czynności	19.1.	19.2.	19.3.	19.4.	19.5.	19.6.
	Maks. liczba pkt	1	1	1	1	2	1
	Uzyskana liczba pkt						

**Zadanie 20. (4 pkt)**

Dane są funkcje  $f(x) = 3^{x^2-5x}$  i  $g(x) = \left(\frac{1}{9}\right)^{-2x^2-3x+2}$ .

Oblicz, dla których argumentów  $x$  wartości funkcji  $f$  są większe od wartości funkcji  $g$ .

*Warunki zadania są równoważne nierówności:  $3^{x^2-5x} > 3^{4x^2+6x-4}$ .*

*Rozwiązuj nierówność:  $3^{x^2-5x} > \left(\frac{1}{9}\right)^{-2x^2-3x+2}$*

$$3^{x^2-5x} > (3^{-2})^{-2x^2-3x+2}$$

$$3^{x^2-5x} > 3^{4x^2+6x-4}$$

*Korzystając z monotoniczności funkcji wykładniczej otrzymujemy nierówność równoważną:*

$$x^2 - 5x > 4x^2 + 6x - 4$$

$$-3x^2 - 11x + 4 > 0$$

$$\Delta = 169, \quad x_1 = \frac{11-13}{-6} = \frac{1}{3}, \quad x_2 = \frac{11+13}{-6} = -4.$$

*Odp.: Rozwiązaniem nierówności jest przedział:  $\left(-4, \frac{1}{3}\right)$ .*

Wypełnia egzaminator!	Nr czynności	20.1.	20.2.	20.3.	20.4.
	Maks. liczba pkt	1	1	1	1
	Uzyskana liczba pkt				

**Zadanie 21. (5 pkt)**

W trakcie badania przebiegu zmienności funkcji ustalono, że funkcja  $f$  ma następujące własności:

- jej dziedziną jest zbiór wszystkich liczb rzeczywistych,
- $f$  jest funkcją nieparzystą,
- $f$  jest funkcją ciągłą

oraz:

$$f'(x) < 0 \text{ dla } x \in (-8, -3),$$

$$f'(x) > 0 \text{ dla } x \in (-3, -1),$$

$$f'(x) < 0 \text{ dla } x \in (-1, 0),$$

$$f'(-3) = f'(-1) = 0,$$

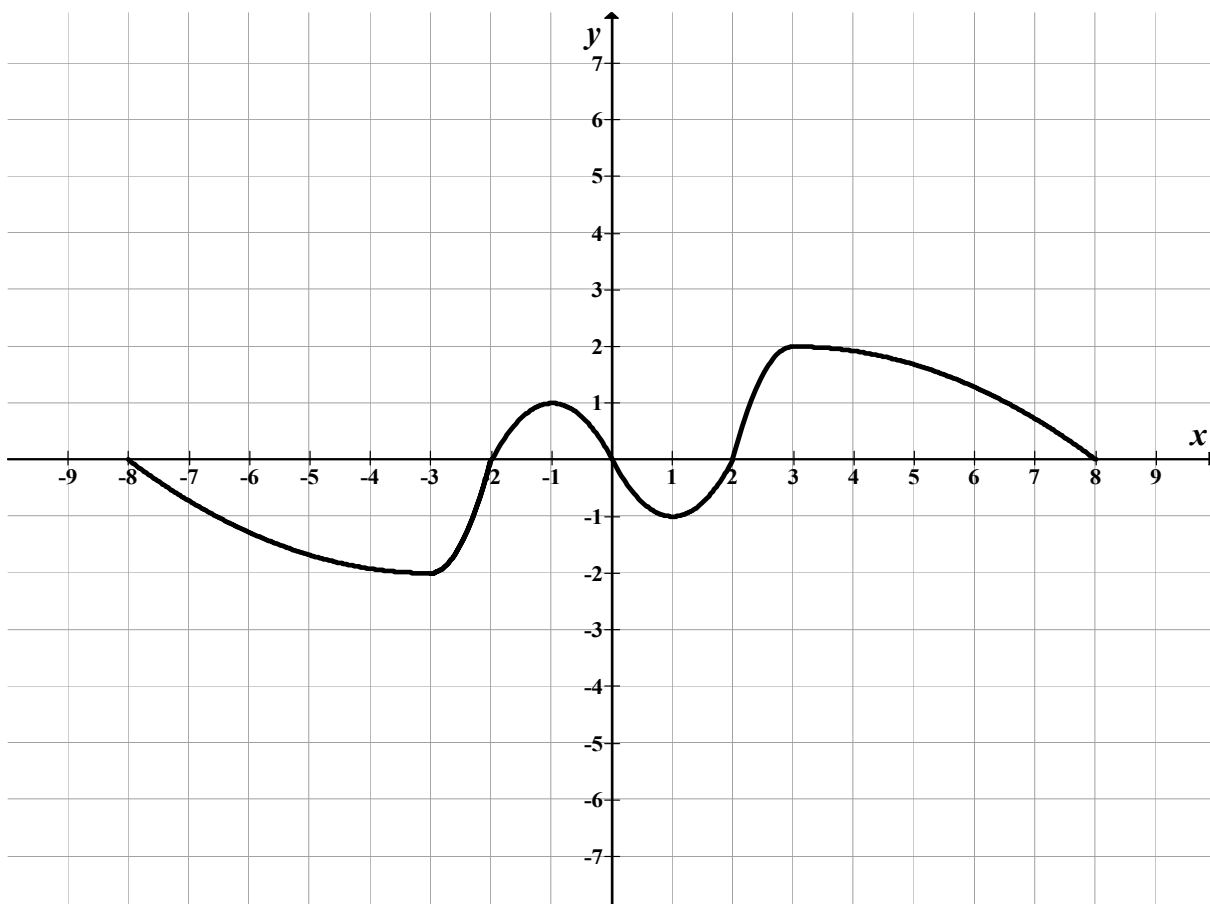
$$f(-8) = 0,$$

$$f(-3) = -2,$$

$$f(-2) = 0,$$

$$f(-1) = 1.$$

W prostokątnym układzie współrzędnych na płaszczyźnie naszkicuj wykres funkcji  $f$  w przedziale  $\langle -8, 8 \rangle$ , wykorzystując podane powyżej informacje o jej własnościach.



Wypełnia egzaminator!	Nr czynności	21.1.	21.2.	21.3.
	Maks. liczba pkt	1	2	2
	Uzyskana liczba pkt			

**BRUDNOPIS**