Miejsce
na naklejkę
z kodem szkoły

dysleksja

MMA-P1_1P-072

EGZAMIN MATURALNY Z MATEMATYKI

POZIOM PODSTAWOWY

Czas pracy 120 minut

MAJ ROK 2007

Instrukcja dla zdającego

1. Sprawdź, czy arkusz egzaminacyjny zawiera 15 stron (zadania 1 – 11). Ewentualny brak zgłoś przewodniczącemu zespołu nadzorującego egzamin.
2. Rozwiązania zadań i odpowiedzi zamieść w miejscu na to przeznaczonym.
3. W rozwiązaniach zadań przedstaw tok rozumowania prowadzący do ostatecznego wyniku.
4. Pisz czytelnie. Używaj długopisu/pióra tylko z czarnym tuszem/atramentem.
5. Nie używaj korektora, a błędne zapisy przekreśl.
6. Pamiętaj, że zapisy w brudnopisie nie podlegają ocenie.
7. Obok każdego zadania podana jest maksymalna liczba punktów, którą możesz uzyskać za jego poprawne rozwiązanie.
8. Możesz korzystać z zestawu wzorów matematycznych, cyrkla i linijki oraz kalkulatora.
9. Wypełnij tę część karty odpowiedzi, którą koduje zdający. Nie wpisuj żadnych znaków w części przeznaczonej dla egzaminatora.
10. Na karcie odpowiedzi wpisz swoją datę urodzenia i PESEL. Zamaluj ■ pola odpowiadające cyfrom numeru PESEL. Błędne zaznaczenie otocz kółkiem i zaznacz właściwe.

Życzymy powodzenia!

Za rozwiązanie wszystkich zadań można otrzymać łącznie **50 punktów**

Przykładowe rozwiązanie

Wypełnia zdający przed rozpoczęciem pracy

PESEL ZDAJĄCEGO

KOD ZDAJĄCEGO

Wszystkie arkusze maturalne znajdziesz na stronie: arkuszematuralne.pl

Zadanie 1. (*5 pkt*)

Znajdź wzór funkcji kwadratowej $y = f(x)$, której wykresem jest parabola o wierzchołku (1,–9) przechodząca przez punkt o współrzędnych (2,–8). Otrzymaną funkcję przedstaw w postaci kanonicznej. Oblicz jej miejsca zerowe i naszkicuj wykres.

Zapisuję funkcję opisującą parabolę, korzystając ze współrzędnych jej wierzchołka: $y = a(x-1)^2 - 9$.

Wyznaczam współczynnik *a*, korzystając z tego, że parabola przechodzi przez punkt o współrzędnych (2,–8):

$-8 = a(2-1)^2 - 9$ stąd $a = 1$.

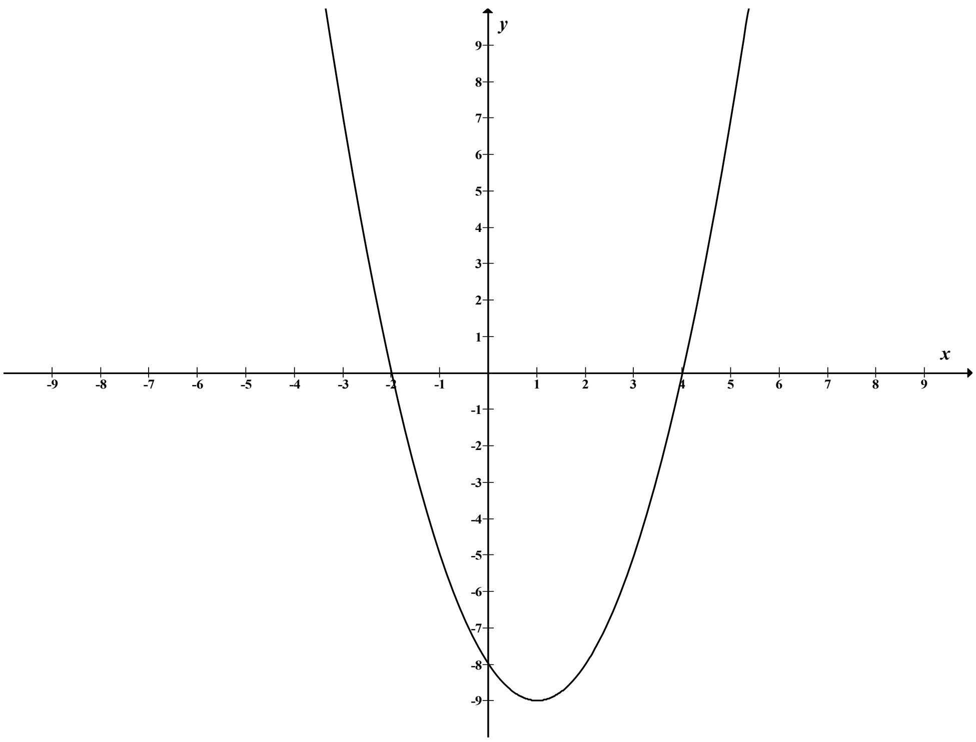
Wzór funkcji w postaci kanonicznej: $f(x) = (x-1)^2 - 9$.

Wyznaczam miejsca zerowe funkcji *f*:

$(x-1)^2 - 9 = 0$, stąd po zastosowaniu odpowiedniego wzoru skróconego mnożenia otrzymuję $(x-1-3)\cdot(x-1+3) = 0$ i po redukcji $(x-4)\cdot(x+2) = 0$.

Miejscami zerowymi funkcji są liczby: $x_1 = -2$, $x_2 = 4$.

Szkicuję wykres funkcji, biorąc pod uwagę miejsca zerowe oraz współrzędne wierzchołka.



Wszystkie arkusze maturalne znajdziesz na stronie: arkuszematuralne.pl

Wszystkie arkusze maturalne znajdziesz na stronie: arkuszematuralne.pl

Zadanie 2. ***(3 pkt)***

Wysokość prowizji, którą klient płaci w pewnym biurze maklerskim przy każdej zawieranej transakcji kupna lub sprzedaży akcji jest uzależniona od wartości transakcji. Zależność ta została przedstawiona w tabeli:

Wartość transakcji	**Wysokość prowizji**
do 500 zł	15 zł
od 500,01 zł do 3000 zł	2% wartości transakcji + 5 zł
od 3000,01 zł do 8000 zł	1,5% wartości transakcji + 20 zł
od 8000,01 zł do 15000 zł	1% wartości transakcji + 60 zł
powyżej 15000 zł	0,7% wartości transakcji + 105 zł

Klient zakupił za pośrednictwem tego biura maklerskiego 530 akcji w cenie 25 zł za jedną akcję. Po roku sprzedał wszystkie kupione akcje po 45 zł za jedną sztukę. Oblicz, ile zarobił na tych transakcjach po uwzględnieniu prowizji, które zapłacił.

Obliczam wartość transakcji:

zakupu $530 \cdot 25 = 13250$ zł

sprzedaży $530 \cdot 45 = 23850$ zł.

Obliczam, jaką prowizję należy zapłacić przy transakcjach:

przy zakupie $13250 \cdot 0,01 + 60 = 192,50$ zł

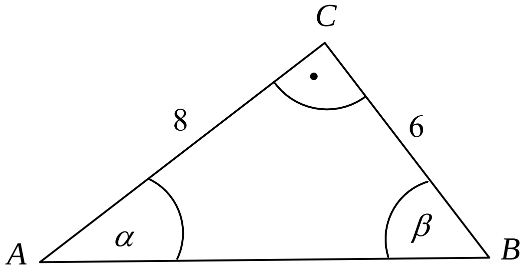
przy sprzedaży $23850 \cdot 0,007 + 105 = 271,95$ zł.

Obliczam zysk ze sprzedaży: $23850 - 13250 - (192,50 + 271,95) = 10135,55$ zł.

Odpowiedź: Klient zarobił 10135,55 zł.

Zadanie 3. *(4 pkt)*

Korzystając z danych przedstawionych na rysunku, oblicz wartość wyrażenia:
$\mathrm{tg}^2\beta - 5\sin\beta \cdot \mathrm{ctg}\alpha + \sqrt{1-\cos^2\alpha}$.



Stosuję twierdzenia Pitagorasa do obliczenia przeciwprostokątnej trójkąta *ABC*:

$|AB| = \sqrt{8^2+6^2} = \sqrt{100} = 10$.

Obliczam wartości funkcji trygonometrycznych kąta α :

$$\cos\alpha = \frac{4}{5},\ \mathrm{ctg}\alpha = \frac{4}{3}.$$

Obliczam wartości funkcji trygonometrycznych kąta β:

$$\sin\beta = \frac{4}{5},\ \mathrm{tg}\beta = \frac{4}{3}.$$

Obliczam wartość wyrażenia $\mathrm{tg}^2\beta - 5\sin\beta \cdot \mathrm{ctg}\alpha + \sqrt{1-\cos^2\alpha}$:

$$\left(\frac{4}{3}\right)^2 - 5\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{4}{3} + \sqrt{1-\left(\frac{4}{5}\right)^2} = -\frac{133}{45}.$$

Wszystkie arkusze maturalne znajdziesz na stronie: arkuszematuralne.pl

Zadanie 4. *(5 pkt)*

Samochód przebył w pewnym czasie 210 km. Gdyby jechał ze średnią prędkością o 10 km/h większą, to czas przejazdu skróciłby się o pół godziny. Oblicz, z jaką średnią prędkością jechał ten samochód.

Wprowadzam oznaczenia:

v – średnia prędkość samochodu,

$\frac{210}{v}$ – czas, w którym samochód przebył drogę ze średnią prędkością v,

$\frac{210}{v+10}$ – czas, w którym samochód przebył drogę ze średnią prędkością $v+10$.

Warunki zadania zapisuję za pomocą równania: $\frac{210}{v}-\frac{210}{v+10}=\frac{1}{2}$,

które po przekształceniu przyjmuje postać: $v^2+10v-4200=0$.

Rozwiązaniem równania są liczby: $v_1=60$, $v_2=-70$. Odrzucam rozwiązanie $v_2=-70$, które jest niezgodne z warunkami zadania.

Odpowiedź: Samochód jechał ze średnią prędkością 60 km/h.

Wszystkie arkusze maturalne znajdziesz na stronie: arkuszematuralne.pl

Zadanie 5. *(5 pkt)*

Dany jest ciąg arytmetyczny (a_n), gdzie $n \geq 1$. Wiadomo, że dla każdego $n \geq 1$ suma n początkowych wyrazów $S_n = a_1 + a_2 + ... + a_n$ wyraża się wzorem: $S_n = -n^2 + 13n$.

a) Wyznacz wzór na n–ty wyraz ciągu (a_n).
b) Oblicz a_{2007}.
c) Wyznacz liczbę n, dla której $a_n = 0$.

a) Do wyznaczenia wzoru na n-ty wyraz ciągu (a_n) stosuję własność sum częściowych: $a_n = S_n - S_{n-1}$.

$a_n = \left(-n^2 + 13n\right) - \left[-\left(n-1\right)^2 + 13\left(n-1\right)\right]$, stąd $a_n = -2n + 14$.

b) Obliczam a_{2007}:

$a_{2007} = -2 \cdot 2007 + 14 = -4000$.

c) Obliczam, który wyraz ciągu przyjmuje wartość zero:

$-2n + 14 = 0$

$n = 7$

Odpowiedź: $a_n = 0$ gdy $n = 7$.

Wszystkie arkusze maturalne znajdziesz na stronie: arkuszematuralne.pl

Zadanie 6. ***(4 pkt)***

Dany jest wielomian $W\left(x\right)=2x^3+ax^2-14x+b$.

a) Dla $a=0$ i $b=0$ otrzymamy wielomian $W\left(x\right)=2x^3-14x$. Rozwiąż równanie $2x^3-14x=0$.

b) Dobierz wartości a i b tak, aby wielomian *W(x)* był podzielny jednocześnie przez $x-2$ oraz przez $x+3$.

a) Rozwiązuję równanie:

$$2x^3-14x=0$$

$$2x\left(x^2-7\right)=0$$

$$2x\left(x-\sqrt{7}\right)\left(x+\sqrt{7}\right)=0$$

z zapisanej postaci iloczynowej odczytuję rozwiązania równania:

$x_1=0,\ \ x_2=\sqrt{7},\ \ x_3=-\sqrt{7}.$

b) Aby znaleźć wartość współczynników a i b korzystam z twierdzenia o podzielności wielomianu przez dwumian, z którego wynika, że:

$W\left(2\right)=0$ oraz $W\left(-3\right)=0$.

Otrzymuję układ równań: $\begin{cases} 16+4a-28+b=0 \\ -54+9a+42+b=0 \end{cases}$, z którego wyznaczam a i b.

$$\begin{cases} 4a+b=12 \\ 9a+b=12 \end{cases}$$

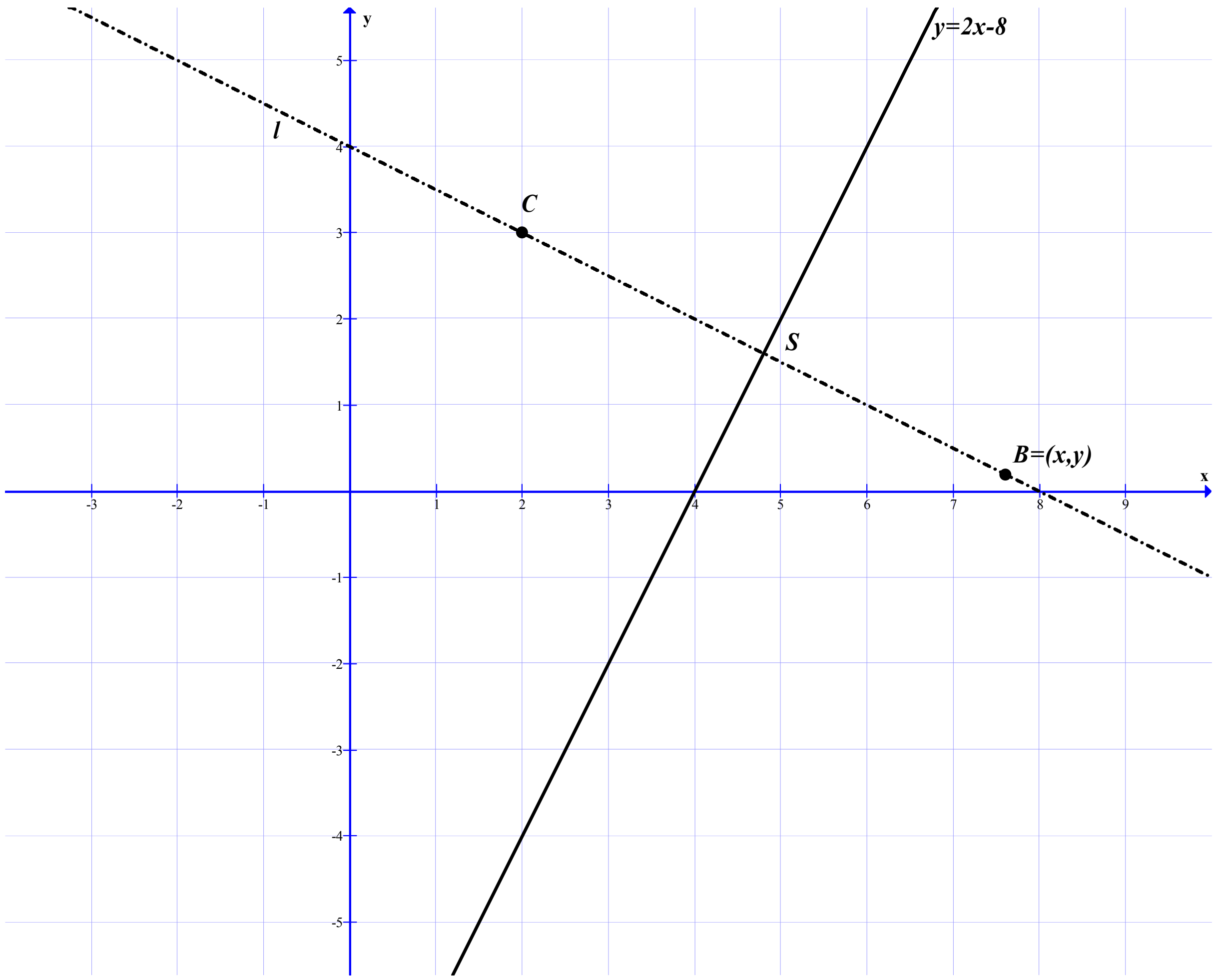
Rozwiązanie układu równań są liczby: a = 0, b = 12.

Wielomian przyjmuje postać: $W\left(x\right)=2x^3-14x+12$.

Wszystkie arkusze maturalne znajdziesz na stronie: arkuszematuralne.pl

Zadanie 7. *(5 pkt)*

Dany jest punkt $C=(2,3)$ i prosta o równaniu $y=2x-8$ będąca symetralną odcinka *BC*. Wyznacz współrzędne punktu *B*. Wykonaj obliczenia uzasadniające odpowiedź.



Poszukiwany punkt $B=(x,y)$ leży na prostej *l*, która jest prostopadła do prostej $y=2x-8$. Wyznaczam współczynnik kierunkowy *a* prostej *l*: $a=-\frac{1}{2}$.

Prosta *l* przechodzi przez punkt $C=(2,3)$, więc zachodzi równość $3=-\frac{1}{2}\cdot 2+b$, z której wyznaczam współczynnik *b*.

$b=4$, więc równanie prostej *l* ma postać: $y=-\frac{1}{2}x+4$.

Wszystkie arkusze maturalne znajdziesz na stronie: arkuszematuralne.pl

Wyznaczam współrzędne punktu S będącego punktem przecięcia prostych:

$y = 2x - 8$ oraz $y = -\frac{1}{2}x + 4$.

Rozwiązaniem układu równań $\begin{cases} y = -\frac{1}{2}x + 4 \\ y = 2x - 8 \end{cases}$ są liczby: $x = \frac{24}{5}$, $y = \frac{8}{5}$.

Punkt S ma więc współrzędne: $\left(\frac{24}{5}, \frac{8}{5}\right)$.

Punkt S jest środkiem odcinka BC.

Zapisuję zależność między współrzędnymi punktu S i końcami odcinka BC:

$\left(\frac{x+2}{2}, \frac{y+3}{2}\right) = \left(\frac{24}{5}, \frac{8}{5}\right)$ i rozwiązuję równania:

$\frac{x+2}{2} = \frac{24}{5}$, stąd $x = \frac{38}{5}$ oraz

$\frac{y+3}{2} = \frac{8}{5}$, stąd $y = \frac{1}{5}$.

Punkt B ma współrzędne: $B = \left(\frac{38}{5}, \frac{1}{5}\right)$.

Wszystkie arkusze maturalne znajdziesz na stronie: arkuszematuralne.pl

Zadanie 8. *(4 pkt)*

Na stole leżało 14 banknotów: 2 banknoty o nominale 100 zł, 2 banknoty o nominale 50 zł i 10 banknotów o nominale 20 zł. Wiatr zdmuchnął na podłogę 5 banknotów. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że na podłodze leży dokładnie 130 zł. Odpowiedź podaj w postaci ułamka nieskracalnego.

Ω jest zbiorem wszystkich pięcioelementowych podzbiorów czternastoelementowego zbioru banknotów.

Zbiór Ω ma moc: $\binom{14}{5} = 2002$.

Zdarzenie A – na podłogę spadło 5 banknotów, które dają kwotę 130 zł.

Jest tylko jeden układ nominałów opisanych w zdarzeniu A:

$1 \cdot 50 + 4 \cdot 20 = 130$ zł.

Obliczam liczbę zdarzeń sprzyjających zajściu zdarzenia A:

$|A| = \binom{2}{1} \cdot \binom{10}{4} = 420$.

Obliczam prawdopodobieństwo $P(A)$ szukanego zdarzenia: $P(A) = \frac{420}{2002}$

i otrzymany ułamek skracam do postaci ułamka nieskracalnego: $P(A) = \frac{30}{143}$.

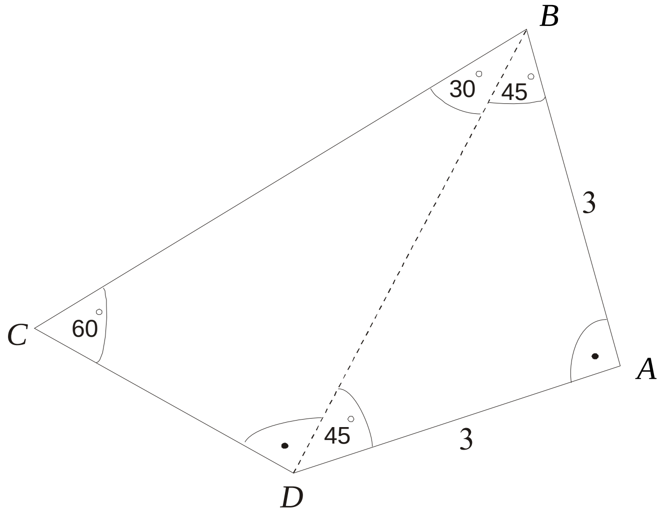
Wszystkie arkusze maturalne znajdziesz na stronie: arkuszematuralne.pl

Wszystkie arkusze maturalne znajdziesz na stronie: arkuszematuralne.pl

Zadanie 9. *(6 pkt)*

Oblicz pole czworokąta wypukłego *ABCD*, w którym kąty wewnętrzne mają odpowiednio miary: $\sphericalangle A = 90^\circ$, $\sphericalangle B = 75^\circ$, $\sphericalangle C = 60^\circ$, $\sphericalangle D = 135^\circ$, a boki *AB* i *AD* mają długość 3 cm. Sporządź rysunek pomocniczy.

Sporządzam rysunek pomocniczy.



Trójkąt *DAB* jest równoramiennym trójkątem prostokątnym, dlatego kąty przy wierzchołkach *B* i *D* są równe i mają miarę 45°.

Obliczam miarę kąta *BDC*: $\sphericalangle BDC = 135^\circ - 45^\circ = 90^\circ$. Trójkąt *CDB* jest więc prostokątny.

Obliczam długość przekątnej *BD* czworokąta *ABCD*: $|BD| = 3\sqrt{2}$ cm.

Z trójkąta *CDB* obliczam długość boku *CD*: $\dfrac{|CD|}{|BD|} = \text{ctg}60^\circ$,

stąd $|CD| = |BD| \cdot \text{ctg}60^\circ$ i po podstawieniu otrzymuję: $|CD| = \sqrt{6}$ cm.

Obliczam pole trójkąta *DAB* oraz pole trójkąta *CDB*:

$P_{\Delta DAB} = 4{,}5\ \text{cm}^2$, $P_{\Delta CDB} = 3\sqrt{3}\ \text{cm}^2$.

Pole czworokąta *ABCD* jest sumą pól tych trójkątów:

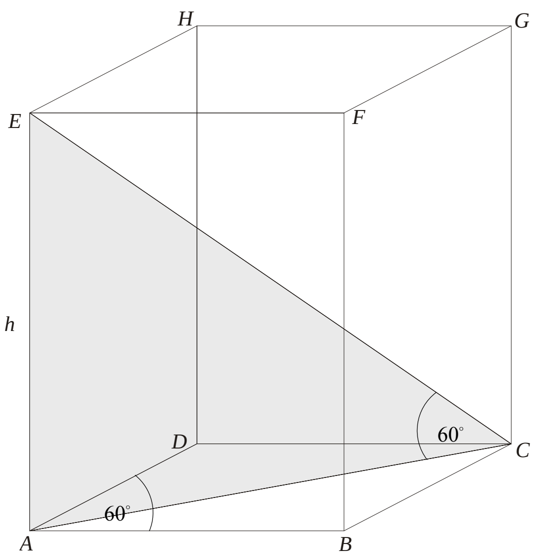
$$P_{ABCD} = \frac{9}{2} + 3\sqrt{3} = \frac{3}{2}\left(3 + 2\sqrt{3}\right)\text{cm}^2.$$

Wszystkie arkusze maturalne znajdziesz na stronie: arkuszematuralne.pl

Zadanie 10. *(5 pkt)*

Dany jest graniastosłup czworokątny prosty *ABCDEFGH* o podstawach *ABCD* i *EFGH* oraz krawędziach bocznych *AE*, *BF*, *CG*, *DH*. Podstawa *ABCD* graniastosłupa jest rombem o boku długości 8 cm i kątach ostrych *A* i *C* o mierze 60°. Przekątna graniastosłupa *CE* jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem 60°. Sporządź rysunek pomocniczy i zaznacz na nim wymienione w zadaniu kąty. Oblicz objętość tego graniastosłupa.

Sporządzam rysunek pomocniczy graniastosłupa i zaznaczam opisane w zadaniu kąty.



Obliczam pole *P* podstawy graniastosłupa: $P = 8^2 \cdot \sin 60^\circ = 32\sqrt{3}\ \text{cm}^2$.

Długość dłuższej przekątnej rombu AC wyznaczam, korzystając z pola rombu:

$$P_{rombu} = 2 \cdot P_{\Delta ABC} = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot |AC| \cdot \sin 30^\circ,$$

$$32\sqrt{3} = 8 \cdot |AC| \cdot \frac{1}{2} \text{ stąd } |AC| = 8\sqrt{3}\,\text{cm}.$$

Wysokość graniastosłupa h wyznaczam z trójkąta *CAE*: $\frac{h}{|AC|} = \text{tg}60^\circ$ stąd

$h = 24\,\text{cm}$.

Obliczam objętość graniastosłupa: $V = 32\sqrt{3} \cdot 24 = 768\sqrt{3}\ \text{cm}^3$.

Zadanie 11. (*4 pkt)*

Dany jest rosnący ciąg geometryczny (a_n) dla $n \geq 1$, w którym $a_1 = x$, $a_2 = 14$, $a_3 = y$. Oblicz *x* oraz *y*, jeżeli wiadomo, że $x + y = 35$.

Wykorzystuję własności ciągu geometrycznego do zapisania układu równań uwzględniającego warunki zadania:

$$\begin{cases} x + y = 35 \\ x \cdot y = 14^2 \end{cases}$$

Doprowadzam układ równań do równania postaci: $x^2 - 35x + 196 = 0$.

Rozwiązaniem równania są liczby: $x_1 = 7$, $x_2 = 28$.

Wyznaczam pary liczb, które są rozwiązaniem układu równań:

$$\begin{cases} x_1 = 7 \\ y_1 = 28 \end{cases} \text{ oraz } \begin{cases} x_2 = 28 \\ y_2 = 7 \end{cases}.$$

Rosnący ciąg geometryczny otrzymamy, gdy $x = 7$, $y = 28$.

Wszystkie arkusze maturalne znajdziesz na stronie: arkuszematuralne.pl

BRUDNOPIS

Wszystkie arkusze maturalne znajdziesz na stronie: arkuszematuralne.pl