

Miejsce
na naklejkę
z kodem szkoły

dysleksja

MMA-R1_1P-072

EGZAMIN MATURALNY Z MATEMATYKI

POZIOM ROZSZERZONY

Czas pracy 180 minut

MAJ
ROK 2007

Instrukcja dla zdającego

1. Sprawdź, czy arkusz egzaminacyjny zawiera 15 stron (zadania 1 – 11). Ewentualny brak zgłoś przewodniczącemu zespołu nadzorującego egzamin.
2. Rozwiązania zadań i odpowiedzi zamieść w miejscu na to przeznaczonym.
3. W rozwiązaniach zadań przedstawiaj tok rozumowania prowadzący do ostatecznego wyniku.
4. Pisz czytelnie. Używaj długopisu/pióra tylko z czarnym tuszem/atramentem.
5. Nie używaj korektora, a błędne zapisy przekreśl.
6. Pamiętaj, że zapisy w brudnopisie nie podlegają ocenie.
7. Obok każdego zadania podana jest maksymalna liczba punktów, którą możesz uzyskać za jego poprawne rozwiązanie.
8. Możesz korzystać z zestawu wzorów matematycznych, cyrkla i linijki oraz kalkulatora.
9. Wypełnij tę część karty odpowiedzi, którą koduje zdający. Nie wpisuj żadnych znaków w części przeznaczonej dla egzaminatora.
10. Na karcie odpowiedzi wpisz swoją datę urodzenia i PESEL. Zamaluj pola odpowiadające cyfrom numeru PESEL. Błędne zaznaczenie otocz kółkiem i zaznacz właściwe.

Życzymy powodzenia!

Za rozwiązanie
wszystkich zadań
można otrzymać
łącznie
50 punktów

Wypełnia zdający przed
rozpoczęciem pracy

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

PESEL ZDAJĄCEGO

--	--	--

KOD
ZDAJĄCEGO

Zadanie 1. (5 pkt)

Dana jest funkcja $f(x) = |x-1| - |x+2|$ dla $x \in \mathbb{R}$.

- Wyznacz zbiór wartości funkcji f dla $x \in (-\infty, -2)$.
- Naszkiej wykres tej funkcji.
- Podaj jej miejsca zerowe.
- Wyznacz wszystkie wartości parametru m , dla których równanie $f(x) = m$ nie ma rozwiązania.

a) Niech $x \in (-\infty, -2)$, wtedy:

$$x-1 < 0, \text{ czyli } |x-1| = -(x-1) \text{ oraz}$$

$$x+2 < 0, \text{ czyli } |x+2| = -(x+2).$$

Zatem dla $x \in (-\infty, -2)$ otrzymujemy:

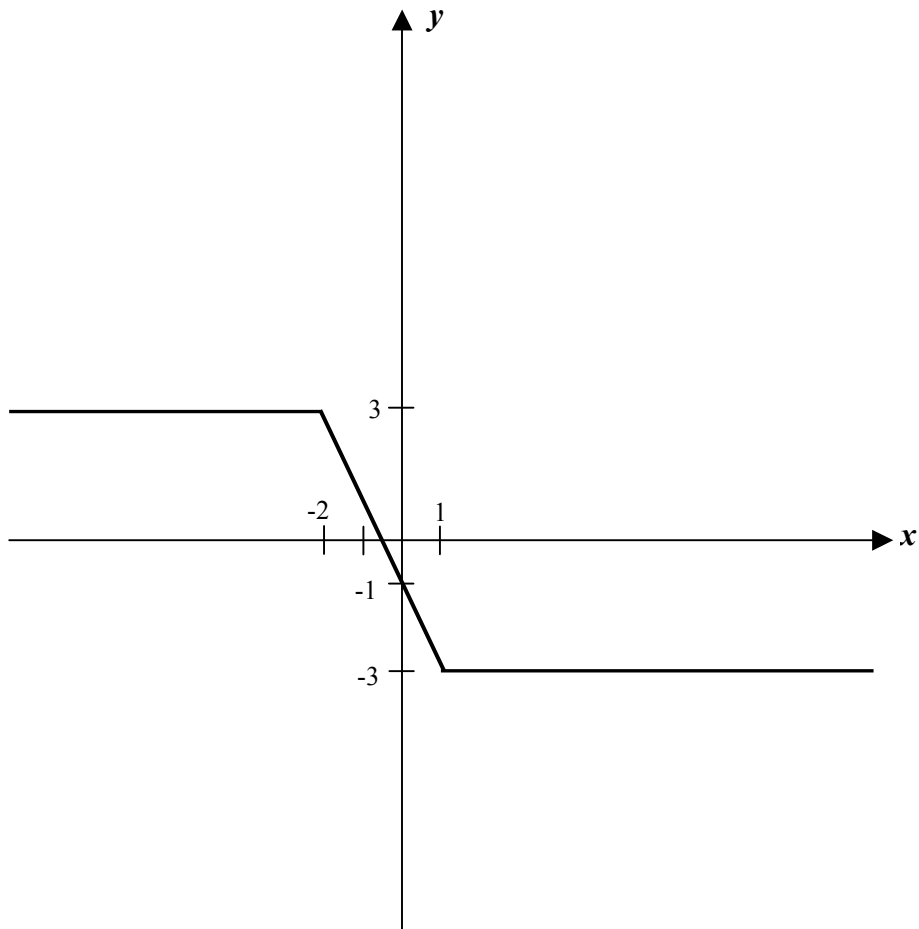
$$f(x) = -(x-1) - (-(x+2)) = -x+1+x+2 = 3.$$

Funkcja f dla $x \in (-\infty, -2)$ jest funkcją stałą, a jej zbiorem wartości jest zbiór $\{3\}$.

b) Po zastosowaniu definicji wartości bezwzględnej funkcję f zapisuję w następującej postaci:

$$f(x) = \begin{cases} 3 & \text{dla } x \in (-\infty, -2) \\ -2x-1 & \text{dla } x \in \langle -2, 1 \rangle \\ -3 & \text{dla } x \in \langle 1, \infty \rangle \end{cases}$$

Szkicuję wykres funkcji f .



Funkcja ma jedno miejsce zerowe w przedziale $(-2,1)$ (co widać na sporządzonym wykresie).

Miejsce zerowe funkcji f wyznaczam, korzystając z jej wzoru w tym przedziale:

$$-2x - 1 = 0, \text{ stąd } x_0 = -\frac{1}{2}.$$

c) Równanie $f(x) = m$ nie ma rozwiązań, gdy prosta o równaniu $y = m$ nie przecina wykresu funkcji f , czyli dla $m < -3$ lub $m > 3$.

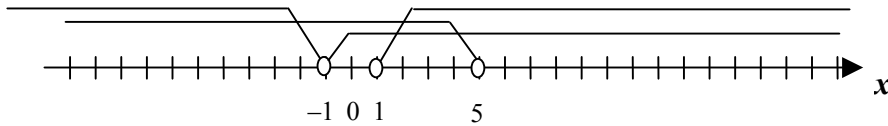
Zadanie 2. (5 pkt)

Rozwiąż nierówność: $\log_{\frac{1}{3}}(x^2 - 1) + \log_{\frac{1}{3}}(5 - x) > \log_{\frac{1}{3}}(3(x + 1))$.

Wyznaczam dziedzinę nierówności logarytmicznej:

$$x^2 - 1 > 0 \wedge 5 - x > 0 \wedge x + 1 > 0.$$

Rozwiązania tych nierówności zaznaczam na osi liczbowej:



Dziedziną danej nierówności jest przedział $(1, 5)$.

Korzystam ze wzoru na sumę logarytmów i otrzymuję nierówność równoważną:

$$\log_{\frac{1}{3}}[(x^2 - 1)(5 - x)] > \log_{\frac{1}{3}}(3(x + 1)).$$

Funkcja logarytmiczna przy podstawie $\frac{1}{3}$ jest malejąca, więc po opuszczeniu

logarytmów i zmianie zwrotu nierówności otrzymuję nierówność równoważną:

$$(x^2 - 1)(5 - x) < 3(x + 1).$$

Przedstawiam ją w postaci iloczynowej:

$$(x - 1)(x + 1)(5 - x) < 3(x + 1)$$

$$(x - 1)(x + 1)(5 - x) - 3(x + 1) < 0$$

$$(x + 1)[(x - 1)(5 - x) - 3] < 0$$

$$(x + 1)(-x^2 + 6x - 8) < 0$$

$$-(x + 1)(x - 2)(x - 4) < 0$$

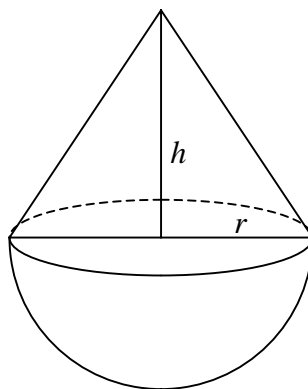
Rozwiązaniem nierówności jest suma przedziałów $(-1, 2) \cup (4, \infty)$.

Rozwiązaniem nierówności logarytmicznej jest część wspólna otrzymanego zbioru i dziedziny: $(1, 2) \cup (4, 5)$.

Zadanie 3. (5 pkt)

Kapsuła ładownika ma kształt stożka zakończonego w podstawie półkulą o tym samym promieniu co promień podstawy stożka. Wysokość stożka jest o 1 m większa niż promień półkuli. Objętość stożka stanowi $\frac{2}{3}$ objętości całej kapsuły. Oblicz objętość kapsuły ładownika.

Sporządzam pomocniczy rysunek:



Zapisuję zależność między długością promienia stożka i jego wysokością:

$$h = r + 1.$$

Objętość V kapsuły zapisuję jako sumę objętości stożka i półkuli:

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot h + \frac{2}{3}\pi r^3 = \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot (r + 1) + \frac{2}{3}\pi r^3 \text{ stąd } V = \pi r^3 + \frac{1}{3}\pi r^2.$$

Zależność między objętością V_s stożka i objętością V kapsuły wynikającą z treści zadania ma postać:

$$V_s = \frac{2}{3}V, \text{ stąd}$$

$$\frac{1}{3}\pi r^2 \cdot (r + 1) = \frac{2}{3}\left(\pi r^3 + \frac{1}{3}\pi r^2\right)$$

$$\frac{1}{3}\pi r^2 (r + 1) = \frac{2}{3}\pi r^2 \left(r + \frac{1}{3}\right)$$

$$r + 1 = 2\left(r + \frac{1}{3}\right)$$

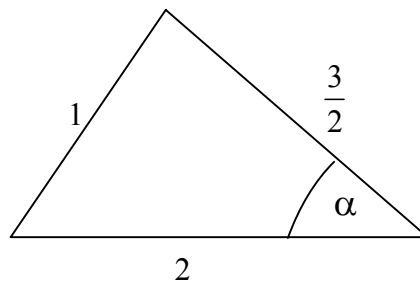
$$r = \frac{1}{3}.$$

Obliczam objętości V kapsuły ładownika: $V = \frac{2\pi}{27}\text{m}^3.$

Zadanie 4. (3 pkt)

Dany jest trójkąt o bokach długości 1 , $\frac{3}{2}$, 2 . Oblicz cosinus i sinus kąta leżącego naprzeciw najkrótszego boku tego trójkąta.

Wykonuję rysunek pomocniczy, na którym zaznaczam poszukiwany kąt:



Wykorzystuję twierdzenie cosinusów do zapisania równania:

$$(1)^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 + 2^2 - 2 \cdot \frac{3}{2} \cdot 2 \cdot \cos \alpha \quad \text{i obliczam wartość cosinusa kąta } \alpha:$$

$$\cos \alpha = \frac{7}{8}.$$

Wartość funkcji sinus kąta α wyznaczam z tożsamości trygonometrycznej

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1.$$

$$\sin^2 \alpha + \left(\frac{7}{8}\right)^2 = 1, \quad \sin^2 \alpha = \frac{15}{64}.$$

$$\text{Kąt } \alpha \text{ jest kątem ostrym, więc } \sin \alpha = \frac{\sqrt{15}}{8}.$$

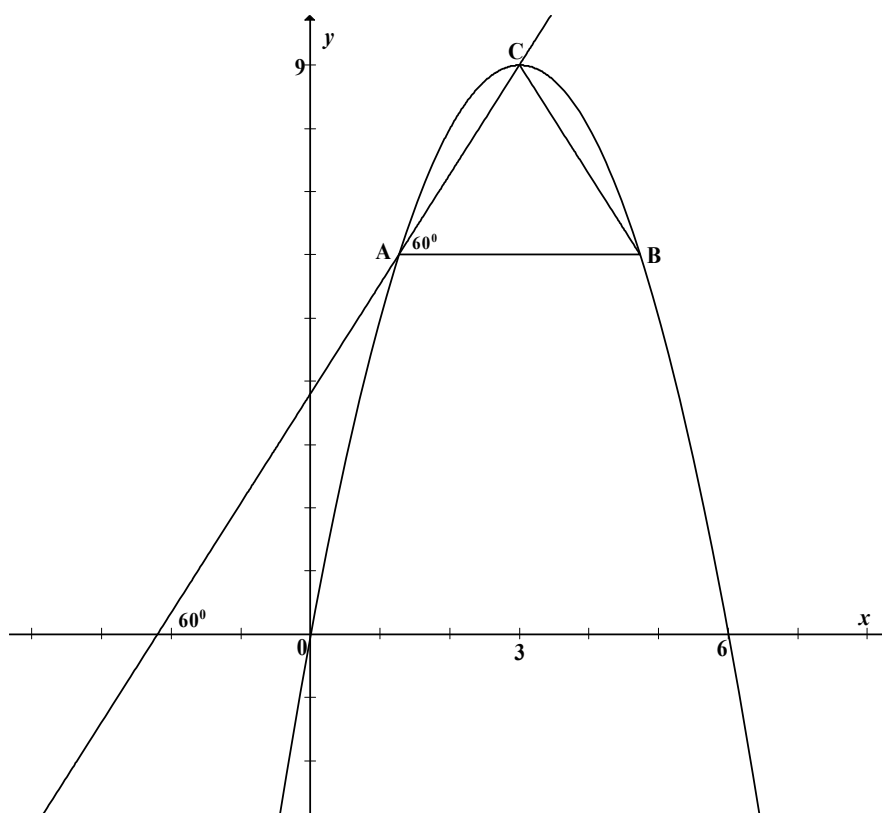
Zadanie 5. (7 pkt)

Wierzchołki trójkąta równobocznego ABC są punktami paraboli $y = -x^2 + 6x$. Punkt C jest jej wierzchołkiem, a bok AB jest równoległy do osi Ox . Sporządź rysunek w układzie współrzędnych i wyznacz współrzędne wierzchołków tego trójkąta.

Aby sporządzić rysunek wyznaczam współrzędne wierzchołka danej paraboli:

$$y = -x^2 + 6x = -(x - 3)^2 + 9, \text{ więc wierzchołek paraboli ma współrzędne } (3, 9).$$

Wykonuję rysunek ilustrujący treść zadania:



Trójkąt ABC jest równoboczny, więc kąt BAC ma miarę 60° . Współczynnik kierunkowy prostej przechodzącej przez punkty A i C jest więc równy $\text{tg } 60^\circ = \sqrt{3}$.

Wyznaczam równanie prostej AC :

prosta $y = \sqrt{3}x + b$ przechodzi przez punkt $C = (3, 9)$, więc współczynnik b jest równy $b = -3\sqrt{3} + 9$.

Prosta AC ma równanie: $y = \sqrt{3}x - 3\sqrt{3} + 9$.

Aby wyznaczyć współrzędne punktu A rozwiązuję układ równań:

$$\begin{cases} y = \sqrt{3}x - 3\sqrt{3} + 9 \\ y = -x^2 + 6x \end{cases}$$

Po dokonaniu podstawienia $y = -x^2 + 6x$ otrzymuję równanie $\sqrt{3}x - 3\sqrt{3} + 9 = -x^2 + 6x$, które po uporządkowaniu przyjmuje postać: $x^2 + x(\sqrt{3} - 6) + 9 - 3\sqrt{3} = 0$.

Rozwiązaniem równania są liczby: $x_1 = 3$, $x_2 = 3 - \sqrt{3}$.

Współrzędne punktów przecięcia prostej AC z parabolą $y = -x^2 + 6x$ są więc następujące: $(3 - \sqrt{3}, 6)$ oraz $(3, 9)$.

Punkt $(3, 9)$ jest wierzchołkiem paraboli, więc punkt A ma współrzędne $(3 - \sqrt{3}, 6)$.

Współrzędne punktu B wyznaczam wykorzystując fakt, iż osią symetrii paraboli $y = -x^2 + 6x$ jest prosta $x = 3$. Punkt B jest więc obrazem punktu A w symetrii względem tej prostej, czyli $B = (3 + \sqrt{3}, 6)$.

Zadanie 6. (4 pkt)

Niech A, B będą zdarzeniami o prawdopodobieństwach $P(A)$ i $P(B)$. Wykaż, że jeżeli $P(A)=0,85$ i $P(B)=0,75$, to prawdopodobieństwo warunkowe spełnia nierówność $P(A|B) \geq 0,8$.

Ponieważ $P(A \cup B) \leq 1$ z własności prawdopodobieństwa, więc

$$1 \geq P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

Stąd po przekształceniu otrzymuję:

$$P(A \cap B) \geq P(A) + P(B) - 1$$

$$P(A \cap B) \geq 0,85 + 0,75 - 1$$

$$P(A \cap B) \geq 0,6$$

Korzystam z definicji prawdopodobieństwa warunkowego:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \geq \frac{0,6}{0,75} \text{ i otrzymuję } P(A|B) \geq 0,8.$$

Zadanie 7. (7 pkt)

Dany jest układ równań:
$$\begin{cases} mx - y = 2 \\ x + my = m \end{cases}$$

Dla każdej wartości parametru m wyznacz parę liczb (x, y) , która jest rozwiązaniem tego układu równań. Wyznacz najmniejszą wartość sumy $x + y$ dla $m \in \langle 2, 4 \rangle$.

Rozwiązaniem układu równań
$$\begin{cases} mx - y = 2 \\ x + my = m \end{cases}$$
 dla każdego $m \in R$ jest para liczb

$$\begin{cases} x = \frac{3m}{m^2 + 1} \\ y = \frac{m^2 - 2}{m^2 + 1} \end{cases}$$

Sumę $x + y$ zapisuję w postaci funkcji $f(m) = \frac{m^2 + 3m - 2}{m^2 + 1}$, $m \in R$.

Aby znaleźć najmniejszą wartość sumy w danym przedziale obliczam pochodną

funkcji f :
$$f'(m) = \frac{-3m^2 + 6m + 3}{(m^2 + 1)^2}, m \in R.$$

Obliczam miejsca zerowe pochodnej funkcji f :

$$f'(m) = 0 \text{ gdy } -3m^2 + 6m + 3 = 0.$$

Rozwiązaniami równania są liczby: $m_1 = 1 - \sqrt{2}$, $m_2 = 1 + \sqrt{2}$, przy czym $m_1 \notin \langle 2, 4 \rangle$.

Badam znak pochodnej w przedziale $\langle 2, 4 \rangle$:

Ponieważ $f'(m) > 0$ dla $m \in (2, 1 + \sqrt{2})$, więc funkcja f jest rosnąca w przedziale $\langle 2, 1 + \sqrt{2} \rangle$. Ponieważ $f'(m) < 0$ dla $m \in (1 + \sqrt{2}, 4)$, więc funkcja f jest malejąca w przedziale $(1 + \sqrt{2}, 4)$.

Stąd wnioskuję, że funkcja f przyjmuje najmniejszą wartość w jednym z końców przedziału $\langle 2, 4 \rangle$.

Obliczam wartość funkcji f na końcach przedziału: $f(2) = \frac{8}{5}$ oraz $f(4) = \frac{26}{17}$

i porównuję otrzymane liczby.

Najmniejszą wartością sumy $x + y$ jest $f(4) = \frac{26}{17}$.

Zadanie 8. (3 pkt)

Dana jest funkcja f określona wzorem $f(x) = \frac{\sin^2 x - |\sin x|}{\sin x}$ dla $x \in (0, \pi) \cup (\pi, 2\pi)$.

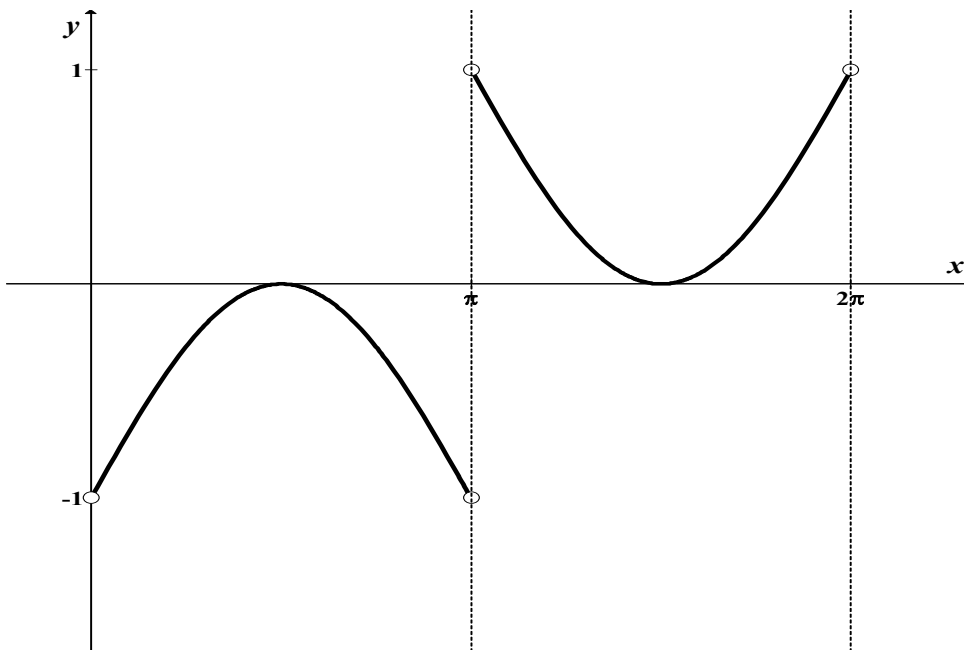
- Naszkiej wykres funkcji f .
- Wyznacz miejsca zerowe funkcji f .

Korzystam z definicji wartości bezwzględnej i zapisuję wzór funkcji f

w postaci:
$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin^2 x - \sin x}{\sin x} & \text{dla } \sin x > 0 \\ \frac{\sin^2 x + \sin x}{\sin x} & \text{dla } \sin x < 0 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} \sin x - 1 & \text{dla } \sin x > 0 \\ \sin x + 1 & \text{dla } \sin x < 0 \end{cases}$$

Szkic wykresu funkcji w podanym zbiorze jest następujący:



Na podstawie wzoru wyznaczam miejsca zerowe funkcji:

$$f(x) = 0 \text{ dla } x \text{ takich, że } \sin x - 1 = 0 \text{ lub } \sin x + 1 = 0,$$

$$\text{czyli dla } x = \frac{\pi}{2}, \text{ oraz } x = \frac{3\pi}{2}.$$

Zadanie 9. (3 pkt)

Przedstaw wielomian $W(x) = x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 4x - 1$ w postaci iloczynu dwóch wielomianów stopnia drugiego o współczynnikach całkowitych i takich, że współczynniki przy drugich potęgach są równe jeden.

Dany wielomian $W(x) = x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 4x - 1$ przedstawiam w takiej postaci, aby można było zastosować wzory skróconego mnożenia:

$$W(x) = x^4 - 2x^3 + x^2 - 4x^2 + 4x - 1.$$

Grupuję wyrazy i przedstawiam wyrażenie w postaci różnicy kwadratów dwóch wyrażeń: $W(x) = (x^2 - x)^2 - (2x - 1)^2$.

Wykorzystuję wzory skróconego mnożenia do rozkładu wielomianu na iloczyn dwóch wielomianów stopnia drugiego:

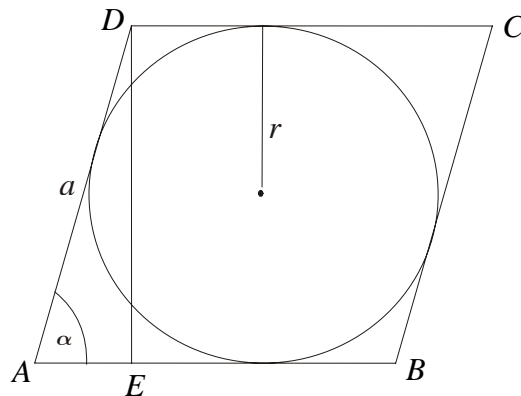
$$\begin{aligned} W(x) &= (x^2 - x)^2 - (2x - 1)^2 = (x^2 - x + 2x - 1) \cdot (x^2 - x - 2x + 1) = \\ &= (x^2 + x - 1) \cdot (x^2 - 3x + 1). \end{aligned}$$

Zadanie 10. (4 pkt)

Na kole opisany jest romb. Stosunek pola koła do pola powierzchni rombu wynosi $\frac{\pi\sqrt{3}}{8}$.

Wyznacz miarę kąta ostrego rombu.

Sporządzam rysunek pomocniczy i wprowadzam następujące oznaczenia:
 a – długość boku rombu, r – promień koła wpisanego w romb, P_K – pole koła wpisanego w romb, P_R – pole rombu, α – kąt ostry rombu.



Zgodnie z wprowadzonymi oznaczeniami $P_K = \pi r^2$, $P_R = a \cdot 2r$.

Z warunków zadania wynika proporcja: $\frac{P_K}{P_R} = \frac{\pi r^2}{a \cdot 2r} = \frac{\pi\sqrt{3}}{8}$, stąd $\frac{r}{2a} = \frac{\sqrt{3}}{8}$.

Z otrzymanej równości wyznaczam promień okręgu: $r = a \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}$.

Z trójkąta prostokątnego AED wyznaczam sinus kąta α : $\sin \alpha = \frac{|DE|}{|AD|} = \frac{2r}{a}$

$$\sin \alpha = \frac{2 \cdot a \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Zatem $\alpha = 60^\circ$.

Zadanie 11. (4 pkt)

Suma n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego (a_n) wyraża się wzorem $S_n = 2n^2 + n$ dla $n \geq 1$.

a) Oblicz sumę 50 początkowych wyrazów tego ciągu o numerach parzystych:

$$a_2 + a_4 + a_6 + \dots + a_{100}.$$

b) Oblicz $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{3n^2 - 2}$.

a) Wyznaczam wzór ogólny ciągu (a_n) , korzystając z własności sum częściowych ciągów: $a_n = S_n - S_{n-1}$

$$a_n = 2n^2 + n - 2(n-1)^2 - n + 1 = 4n - 1.$$

Wyznaczam wartość wyrazu $a_2 = 7$ i różnicy ciągu $(a_2, a_4, \dots, a_{100})$, $r = 8$.

Obliczam sumę $n = 50$ początkowych wyrazów ciągu o numerach

parzystych: $S_{50} = \frac{2 \cdot 7 + (50-1) \cdot 8}{2} \cdot 50 = 10150$.

b) Obliczam granicę ciągu $\frac{S_n}{3n^2 - 2}$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{3n^2 - 2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 + n}{3n^2 - 2} = \frac{2}{3}.$$

BRUDNOPIS