

## TEST PRZED MATURĄ 2007

### MODELE ODPOWIEDZI DO PRZYKŁADOWEGO ARKUSZA EGZAMINACYJNEGO Z MATEMATYKI

#### ZAKRES ROZSZERZONY

Numer zadania	Modele odpowiedzi i schemat punktowania	Liczba punktów
<b>1.</b>	Sprawdzenie, czy warunki zadania są spełnione, gdy $a = 0$ : dla $m = 1$ funkcja jest stała, stale dodatnia.	1
	Zapisanie warunków, kiedy trójmian kwadratowy przyjmuje zawsze wartości dodatnie: $\begin{cases} a > 0 \\ \Delta < 0 \end{cases}$	1
	Obliczenie wyróżnika trójmianu: $\Delta = -3m^2 + 2m + 1$	1
	Rozwiązanie układu nierówności: $m \in (1, +\infty)$	1
	Podanie odpowiedzi: $m \in \langle 1, +\infty \rangle$	1
<b>2.</b>	Zapisanie równania wykładniczego: $(2^{\sqrt[3]{16}})^x = \frac{\sqrt{2}}{8}$ , gdzie $x$ to wartość szukanego logarytmu.	1
	Przekształcenie równania do postaci: $2^{\frac{7}{3}x} = 2^{-\frac{5}{2}}$	1
	Rozwiązanie równania i podanie odpowiedzi: $\log_{2^{\sqrt[3]{16}}} \frac{\sqrt{2}}{8} = -\frac{15}{14}$	1
<b>3.</b>	Zapisanie wzoru funkcji bez użycia wartości bezwzględnej: $y = \begin{cases} 1 & \text{dla } x \geq 0 \\ 4^x & \text{dla } x < 0 \end{cases}$	1
	Naszkiecowanie wykresu funkcji: suma półprostej i fragmentu krzywej wykładniczej.	1
	Podanie odpowiedzi: równanie ma przynajmniej jedno rozwiązanie dla $m \in (0, 1)$	1
<b>4.</b>	Zapisanie wzoru wielomianu spełniającego warunki zadania: : $W(x) = x^2 + qx^2 + q^2x + q^3$	1
	Ułożenie równania: $1 + q + q^2 + q^3 = 15$	1
	Rozwiązanie równania: $q = 2$	1
	Podanie odpowiedzi: $W(x) = x^2 + 2x^2 + 4x + 8$	1
<b>5.</b>	Zapisanie liczby pod pierwiastkiem w postaci kwadratu liczby: $a = \sqrt{(3 - 2\sqrt{5})^2} - 2\sqrt{5}$	1

	Zapisanie liczby $a$ bez użycia pierwiastka: $a =  3 - 2\sqrt{5}  - 2\sqrt{5}$	1
	Zapisanie liczby bez użycia wartości bezwzględnej, co wykazuje tezę zadania: $a = -3$	1
6.	Opis zdarzeń losowych potrzebnych do rozwiązania zadania: $A$ - wylosowanie kuli białej, $B_1, B_2$ - odpowiednio wyrzucenie dwóch orłów, wyrzucenie innej liczby orłów, niż dwa w rzucie trzema monetami.	1
	Obliczenie prawdopodobieństw zdarzeń $B_1, B_2 : P(B_1) = \frac{3}{8}, P(B_2) = \frac{5}{8}$	1
	Obliczenie prawdopodobieństw warunkowych: $P(A/B_1) = \frac{5}{12}, P(A/B_2) = \frac{4}{12}$	1
	Skorzystanie ze wzoru na prawdopodobieństwo całkowite i obliczenie prawdopodobieństwa zdarzenia $A : P(A) = \frac{35}{96}$	1
7.	Zauważenie, że w mianowniku ułamka jest suma ciągu arytmetycznego i podanie parametrów tego ciągu: $a_1 = 4, r = 4, n$ - liczba wyrazów.	1
	Zapisanie wzoru ciągu w najprostszej postaci: $a_n = \frac{n^2}{2n + 2n^2}$	1
	Obliczenie granicy: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2}{2n + 2n^2} = \frac{1}{2}$	1
8.	Rozwiązanie równania dla $a \neq -5 : x = \frac{b}{a+5}$	1
	Rozwiązanie równania dla $a = -5 \wedge b = 0 : x \in R$	1
	Rozwiązanie równania dla: $a = -5 \wedge b \neq 0$ : równanie sprzeczne.	1
9.	Sporządzenie rysunku z oznaczeniami lub wprowadzenie dokładnie opisanych oznaczeń: $ABC$ – dany trójkąt, $\alpha$ - kąt przy wierzchołku $A$ , $AD$ – dwusieczna tego kąta, $x, y$ – długości odcinków, na jakie ta dwusieczna dzieli bok przeciwległy, $\beta$ – kąt między tym bokiem i dwusieczną, $c, b$ – boki trójkąta odpowiadające odcinkom $x, y$	1
	Zastosowanie twierdzenia sinusów dla trójkąta $ABD : \frac{x}{\sin \frac{\alpha}{2}} = \frac{c}{\sin \beta}$	1
	Zastosowanie twierdzenia sinusów dla trójkąta $ACD : \frac{y}{\sin \frac{\alpha}{2}} = \frac{b}{\sin(180^\circ - \beta)}$	1

	Wyznaczenie np $\sin \frac{\alpha}{2}$ z pierwszego równania i podstawienie do drugiego: $\frac{yc}{x \sin \beta} = \frac{b}{\sin(180^\circ - \beta)}$	1
	Wykorzystanie wzoru redukcyjnego i wykazanie tezy zadania: $\frac{y}{x} = \frac{b}{c}$	1
<b>10</b>	Sporządzenie rysunku z oznaczeniami lub wprowadzenie dokładnie opisanych oznaczeń: $ABC$ – dany trójkąt, $r$ - wysokość trójkąta poprowadzona na najdłuższy bok ( promień stożków "sklejonych" podstawami), $h_1, h_2$ - wysokości powstałych stożków	1
	Obliczenie pola trójkąta: $P = 6\sqrt{11}$	1
	Ułożenie równania z niewiadomą $r$ : $\frac{9r}{2} = 6\sqrt{11}$	1
	Obliczenie długości promieni powstałych stożków: $r = \frac{4\sqrt{11}}{3}$	1
	Zapisanie objętości bryły jako sumy objętości dwóch stożków: $V = \frac{1}{3}\pi r^2(h_1 + h_2)$	1
	Obliczenie objętości bryły: $V = \frac{176\pi}{3}$	1
<b>11</b>	Sporządzenie rysunku z oznaczeniami lub wprowadzenie dokładnie opisanych oznaczeń: narysowanie paraboli, stycznej do niej w punkcie o odciętej $x_0$ , $ABO$ – powstały trójkąt, $O$ - początek układu współrzędnych.	1
	Wyznaczenie równania stycznej: $y = -2x_0x + x_0^2 + 4$	1
	Obliczenie współrzędnych punktów przecięcia stycznej z osiami układu współrzędnych: $A = (0, x_0^2 + 4), B = \left(\frac{x_0^2 + 4}{2x_0}, 0\right)$	1
	Wyznaczenie pola trójkąta w zależności od $x_0$ : $P(x_0) = \frac{(x_0^2 + 4)^2}{4x_0}, x_0 \in (0, 2)$	1
	Wyznaczenie pochodnej funkcji opisującej pole: $x_0 : P'(x_0) = \frac{(x_0^2 + 4)(3x_0^2 - 4)}{4x_0^2}, x_0 \in (0, 2)$	1
	Wyznaczenie miejsca zerowego pochodnej: $x_0 = \frac{2\sqrt{3}}{3}$	1

	Uzasadnienie, że w znalezionym punkcie jest najmniejsza wartość funkcji i podanie odpowiedzi: funkcja stale maleje na lewo od ekstremum i stale rośnie na prawo, więc minimum funkcji jest jej najmniejszą wartością. Styczną należy więc poprowadzić w punkcie o odciętej $x_0 = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ .	1
<b>12</b>	Przekształcenie lewej strony równania z wykorzystaniem wzorów na sumę sinusów i różnicę sinusów: $\sin(\alpha - \beta) = 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \quad 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$	1
	Doprowadzenie prawej strony do najprostszej postaci z wykorzystaniem wzoru na sinus kąta podwojonego: $\sin(\alpha - \beta) = \sin(\alpha + \beta) \sin(\alpha + \beta)$	1
	Obliczenie sinusa sumy dwóch różnych kątów trójkąta: $\sin(\alpha + \beta) = 1$	1
	Wyciągnięcie wniosku: $\alpha + \beta = 90^\circ \Rightarrow$ trzeci kąt trójkąta jest prosty, więc trójkąt jest prostokątny.	1