

Matematyka
Poziom rozszerzony

Listopad 2009

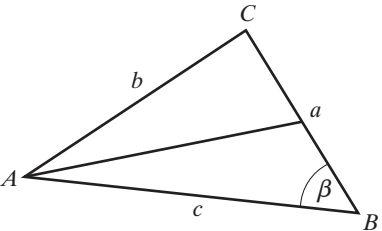
W kluczu są prezentowane przykładowe prawidłowe odpowiedzi. Należy również uznać odpowiedzi ucznia, jeśli są inaczej sformułowane, ale ich sens jest synonimiczny wobec schematu, oraz inne odpowiedzi, nieprzewidziane w kluczu, ale poprawne.

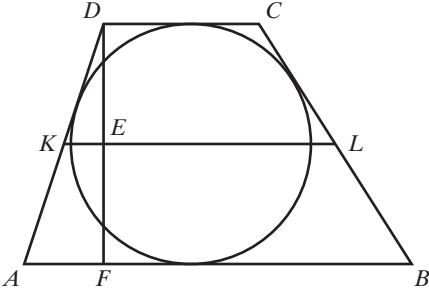
Wszystkie arkusze maturalne znajdziesz na stronie: arkuszematuralne.pl

Numer zadania	Etapy rozwiązywania zadań	Liczba punktów
1.	<p>Dokonanie niewielkiego postępu. Sprowadzenie układu równań do równania z jedną niewiadomą.</p> $\begin{cases} 3 - y = x \\ 3 = 6 - 2 y + y \\ -2 y + y = -3 \end{cases}$	1
	<p>Pokonanie zasadniczych trudności zadania. Obliczenie zmiennej y.</p> $y \geq 0 \text{ i } -2y + y = -3 \quad \text{lub} \quad y < 0 \text{ i } 2y + y = -3$ $y = 3 \quad \quad \quad \quad \quad y = -1$	1
	<p>Rozwiązanie zadania do końca – w rozwiązaniu występują niewielkie usterki. Obliczenie zmiennej x.</p> $\begin{aligned} x = 3 - 3 = 0 \quad \quad \quad \text{lub} \quad x = 3 - -1 = 2 \\ x = 0 \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \text{lub} \quad x = 2 \text{ lub } x = -2 \end{aligned}$	1
	<p>Rozwiązanie bezbłędne.</p> $x = 0, y = 3 \text{ lub } x = 2, y = -1 \text{ lub } x = -2, y = -1$	1
2.	<p>Dokonanie niewielkiego postępu. Wykorzystanie zależności między funkcjami trygonometrycznymi tego samego kąta.</p> $(1 + \sin x) \left(\frac{1}{\cos x} - \operatorname{tg} x \right) + \frac{1}{3} = 0$ $(1 + \sin x) \left(\frac{1 - \sin x}{\cos x} \right) = -\frac{1}{3}$	1
	<p>Dokonanie istotnego postępu. Sprowadzenie równania do równania z jedną niewiadomą.</p> $\frac{1 - \sin^2 x}{\cos x} = -\frac{1}{3}$ $\frac{\cos^2 x}{\cos x} = -\frac{1}{3}$ $\cos x = -\frac{1}{3}$	1
	<p>Pokonane zasadniczych trudności zadania. Uwzględnienie założeń i obliczenie $\sin x$.</p> $\sin^2 x = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}$ $\sin x = \frac{2\sqrt{2}}{3}$	1
	<p>Rozwiązanie zadania do końca – w rozwiązaniu występują drobne usterki. Obliczenie $\sin x + \cos x$.</p> $\sin x + \cos x = \frac{2\sqrt{2}}{3} - \frac{1}{3} = \frac{2\sqrt{2} - 1}{3}$	1

Numer zadania	Etapy rozwiązywania zadań	Liczba punktów
	<p>Rozwiązanie bezbłędne. Określenie znaku liczby $\sin x + \cos x$. $\frac{2\sqrt{2}-1}{3} \approx 0,6 > 0$</p>	1
3.	<p>Dokonanie niewielkiego postępu. Zauważenie, że $P = (x, 0)$ i zapisanie odpowiednich równości. $\vec{PD} = k \cdot \vec{PB}$ $\vec{PC} = k \cdot \vec{PA}$ $\vec{PC} = [4-x, 0]$ i $\vec{PD} = [6-x, 2]$ $\vec{PA} = [1-x, 0]$ i $\vec{PB} = [2-x, 1]$</p>	1
	<p>Dokonanie istotnego postępu. Zapisanie równości pozwalających na wyznaczenie k oraz x. $k \cdot \vec{PA} = [k(1-x), 0]$ $k \cdot \vec{PB} = [k(2-x), k]$ $k(1-x) = 4-x$ i $k(2-x) = 6-x$</p>	1
	<p>Pokonanie zasadniczych trudności zadania. Rozwiązanie układu równań. $k = 2, x = -2$</p>	1
	<p>Rozwiązanie zadania do końca – w rozwiązaniu występują drobne usterki. Obliczenie długości promienia okręgu i współrzędnych punktu P. $r = \sqrt{(2-1)^2 + (1-0)^2} = \sqrt{2}$ $P = (-2, 0)$</p>	1
	<p>Rozwiązanie bezbłędne. Zapisanie równania okręgu. $(x+2)^2 + y^2 = 2$</p>	1
4.	<p>Dokonanie niewielkiego postępu. Obliczenie $\log 100$ i sprowadzenie logarytmów do tej samej podstawy. $\log_a x + \log_x a \geq 2$ $\log_x a = \frac{1}{\log_a x}$ $\log_a x + \frac{1}{\log_a x} \geq 2$</p>	1
	<p>Pokonanie zasadniczych trudności zadania. Dokonanie odpowiedniego podstawienia i sprowadzenie nierówności do postaci nierówności kwadratowej. $k = \log_a x$ $k + \frac{1}{k} \geq 2$ $k^2 + 1 \geq 2k$, gdyż $k > 0$</p>	1
	<p>Rozwiązanie zadania do końca – w rozwiązaniu występują drobne usterki. Wykorzystanie wzoru skróconego mnożenia do przekształcenia nierówności. $(k-1)^2 \geq 0$</p>	1
	<p>Rozwiązanie bezbłędne. Zauważenie, że dla każdej liczby k spełniającej warunki zadania liczba $(k-1)^2$ jest zawsze nieujemna, zatem $(\log_a x - 1)^2 \geq 0$. Nierówność $\log_a x + \log_x a \geq 2$ jest zatem prawdziwa.</p>	1

Numer zadania	Etapy rozwiązywania zadań	Liczba punktów
5.	Dokonanie istotnego postępu. Zapisanie długości spirali. $L = \pi r + \frac{1}{2} \pi r + \dots + \frac{1}{2^9} \pi r$	1
	Pokonanie zasadniczych trudności zadania. Zauważenie, że wyrazy sumy tworzą ciąg geometryczny o ilorazie $\frac{1}{2}$ i pierwszym wyrazie πr .	1
	Rozwiązanie bezbłędne. Obliczenie sumy ciągu geometrycznego. $l = \pi r \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{10}}{1 - \frac{1}{2}} = \pi r \cdot \frac{1 - \frac{1}{1024}}{\frac{1}{2}} = \frac{1023}{512} \pi r$	1
6.	Dokonanie niewielkiego postępu. Określenie dzielników wyrazu wolnego: $-1, 1, -2, 2, -4, 4$. Sprawdzenie, że jednym z pierwiastków wielomianu jest liczba 1.	1
	Dokonanie istotnego postępu. Wykonanie dzielenia wielomianu przez dwumian $x - 1$ i zapisanie wielomianu w postaci iloczynowej. $W(x) = (x - 1)(x^3 + 2x^2 - 2x - 4)$	1
	Pokonanie zasadniczych trudności zadania. Rozłożenie wyrażenia $x^3 + 2x^2 - 2x - 4$ na czynniki. $x^3 + 2x^2 - 2x - 4 = x^2(x + 2) - 2(x + 2) = (x + 2)(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})$	1
	Rozwiązanie zadania do końca – w rozwiązaniu występują drobne usterki. Określenie pierwiastków wielomianu: $1, -2, \sqrt{2}, -\sqrt{2}$.	1
	Rozwiązanie bezbłędne. Obliczenie sumy odwrotności pierwiastków wielomianu. $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}$ – liczba wymierna	1
7.	Dokonanie niewielkiego postępu. Zapisanie odpowiedniej równości, wynikającej z faktu, że punkt $A = (x, y)$ leży w tej samej odległości od prostej i punktu P . $\sqrt{(0 - x)^2 + \left(\frac{1}{2} - y\right)^2} = \frac{\left y + \frac{1}{2}\right }{\sqrt{0 + 1^2}}$	1
	Pokonanie zasadniczych trudności zadania. Podniesienie obu stron równania do kwadratu i wykonanie redukcji wyrazów podobnych. $x^2 - 2y = 0$	1
	Rozwiązanie zadania do końca – w rozwiązaniu występują drobne usterki. Określenie wzoru odpowiedniej krzywej. $y = \frac{1}{2} x^2$	1
	Rozwiązanie bezbłędne. Zapisanie wzoru funkcji. $f(x) = \frac{1}{2} x^2$	1

Numer zadania	Etapy rozwiązywania zadań	Liczba punktów
8.	<p>Dokonanie niewielkiego postępu.</p>  <p>Wykorzystanie wzoru cosinusów. s – długość środkowej</p> $s^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + c^2 - 2 \cdot \frac{a}{2} \cdot c \cdot \cos \beta$ $s^2 = \frac{a^2}{4} + c^2 - ac \cos \beta$	1
	<p>Pokonanie zasadniczych trudności zadania. Obliczenie $\cos \beta$.</p> $b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cos \beta$ $\cos \beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$	1
	<p>Rozwiązanie zadania do końca – w rozwiązaniu występują drobne usterki. Dokonanie odpowiedniego podstawienia i obliczenie s.</p> $s^2 = \frac{a^2}{4} + c^2 - ac \cdot \left(\frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca}\right)$ $s^2 = \frac{2c^2 + 2b^2 - a^2}{4}$	1
	<p>Rozwiązanie bezbłędne.</p> $s = 0,5 \sqrt{2c^2 + 2b^2 - a^2}$	1
9.	<p>Dokonanie niewielkiego postępu. Zapisanie sumy cyfr liczby a. $a = 24681012\dots98100$ $S = 2 + 4 + 6 + 8 + 1 + 0 + 1 + 2 + 1 + 4 + 1 + 6 + \dots + 9 + 8 + 1 + 0 + 0$</p> <p>Dokonanie istotnego postępu. Pogrupowanie składników w odpowiedni sposób.</p> $S = (2 + 4 + 6 + 8) + [(0 + 2 + 4 + 6 + 8) + 5] + [(0 + 2 + 4 + 6 + 8) + 10] + \dots + [(0 + 2 + 4 + 6 + 8) + 45] + 1$ <p>Pokonanie zasadniczych trudności zadania. Obliczenie sumy cyfr z wykorzystaniem wzoru na sumę ciągu arytmetycznego.</p> $S = [20 + (20 + 5) + (20 + 10) + \dots + (20 + 45)] + 1 =$ $= 10 \cdot 20 + (5 + 10 + \dots + 45) + 1 = 201 + \frac{5+45}{2} \cdot 9 = 426$	1
	<p>Rozwiązanie zadania do końca – w rozwiązaniu występują drobne usterki. Obliczenie sumy cyfr liczby 426 i stwierdzenie, że jest to liczba podzielna przez 3, ale niepodzielna przez 9.</p>	1
	<p>Rozwiązanie bezbłędne.</p> <p>Jeśli liczba a byłaby kwadratem pewnej liczby, musiałaby dzielić się przez $3^2 = 9$. Liczba a dzieli się przez 3, a nie dzieli się przez 9, nie jest więc kwadratem liczby naturalnej.</p>	1

Numer zadania	Etapy rozwiązywania zadań	Liczba punktów
10.	<p>Dokonanie niewielkiego postępu. Określenie warunków istnienia dwóch różnych pierwiastków dodatnich.</p> $\begin{cases} \Delta > 0 \\ x_1 + x_2 > 0 \\ x_1 \cdot x_2 > 0 \end{cases}$	1
	<p>Dokonanie istotnego postępu. Określenie, kiedy wyróżnik jest większy od zera</p> $\Delta = k^2 - 9 = (k - 3)(k + 3)$ $\Delta > 0 \text{ dla } k \in (-\infty, -3) \cup (3, \infty)$	1
	<p>Pokonanie zasadniczych trudności zadania. Określenie, kiedy suma i iloczyn pierwiastków są większe od zera – wykorzystanie wzorów Viète’a.</p> $x_1 + x_2 > 0 \Leftrightarrow -(k+1) > 0 \Leftrightarrow k < -1$ $x_1 \cdot x_2 \geq 0 \Leftrightarrow 0,5(k+5) > 0 \Leftrightarrow k > -5$ <p>Stąd $k \in (-5, -1)$</p>	1
	<p>Rozwiązanie zadania do końca – w rozwiązaniu występują drobne usterki. Określenie iloczynu odpowiednich zbiorów.</p> $k \in [(-\infty, -3) \cup (3, \infty)] \cap (-5, -1)$ $k \in (-5, -3)$	1
	<p>Rozwiązanie bezbłędne. $k \in (-5, -3)$</p>	1
11.	<p>Dokonanie niewielkiego postępu.</p>  <p>Uwzględnienie własności czworokąta opisanego na okręgu.</p> $ AD + CB = AB + CD $	1
	<p>Dokonanie istotnego postępu. Określenie długości odcinka LK.</p> $ LK = \frac{ AB + DC }{2} = \frac{ AD + CB }{2} = 8$	1
	<p>Pokonanie zasadniczych trudności zadania. Wykorzystanie zależności między polami odpowiednich czworokątów i bokami czworokąta.</p> $\frac{P}{P_1} = \frac{3}{5}$ $\frac{0,5(8 + DC) \cdot DE }{0,5(8 + AB) \cdot FE } = \frac{3}{5}$ <p>$DE = EF$ – z twierdzenia Talesa</p> $ AB + DC = 16 \Rightarrow DC = 16 - AB $	1

Numer zadania	Etapy rozwiązywania zadań	Liczba punktów
	Rozwiązanie części zadania. Obliczenie długości jednej z podstaw. $0,5(8 + DC) \cdot DE = \frac{3}{5} \cdot 0,5(8 + AB) \cdot FE $ $\frac{16}{5} = \frac{3}{5} AB - DC $ $\frac{16}{5} = \frac{3}{5} AB - (16 - AB)$ $ AB = 12$	1
	Rozwiązanie zadania do końca – w rozwiązaniu występują drobne usterki. Obliczenie długości drugiej podstawy. $ CD = 16 - 12 = 4$	1
	Rozwiązanie bezbłędne. $ AB = 12, CD = 4$	1