



**Centralna Komisja Egzaminacyjna w Warszawie**

# **EGZAMIN MATURALNY 2010**

## **MATEMATYKA**

### **POZIOM PODSTAWOWY**

#### **Klucz punktowania odpowiedzi**

**MAJ 2010**

**Zadania zamknięte**

W zadaniach od 1. do 25. podane były cztery odpowiedzi: A, B, C, D. Zdający wybierał poprawną odpowiedź i zaznaczał ją na karcie odpowiedzi.

**Zadanie 1.**

Obszar standardów	Sprawdzane umiejętności	Poprawna odpowiedź (1 p.)
Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji	Wykorzystanie interpretacji geometrycznej wartości bezwzględnej do wskazania zbioru rozwiązań nierówności typu $ x - a  \geq b$	C

**Zadanie 2.**

Obszar standardów	Sprawdzane umiejętności	Poprawna odpowiedź (1 p.)
Modelowanie matematyczne	Wykonywanie obliczeń procentowych	B

**Zadanie 3.**

Obszar standardów	Sprawdzane umiejętności	Poprawna odpowiedź (1 p.)
Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji	Wykorzystanie w obliczeniach praw działań na potęgach	A

**Zadanie 4.**

Obszar standardów	Sprawdzane umiejętności	Poprawna odpowiedź (1 p.)
Użycie i tworzenie strategii	Obliczenie sumy logarytmów	B

**Zadanie 5.**

Obszar standardów	Sprawdzane umiejętności	Poprawna odpowiedź (1 p.)
Wykorzystanie i tworzenie informacji	Wykonanie dodawania wielomianów	A

**Zadanie 6.**

Obszar standardów	Sprawdzane umiejętności	Poprawna odpowiedź (1 p.)
Wykorzystanie i tworzenie informacji	Rozwiązanie prostego równania wymiernego, prowadzącego do równania liniowego	<b>D</b>

**Zadanie 7.**

Obszar standardów	Sprawdzane umiejętności	Poprawna odpowiedź (1 p.)
Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji	Sprawdzenie, czy dana liczba należy do zbioru rozwiązań nierówności kwadratowej	<b>D</b>

**Zadanie 8.**

Obszar standardów	Sprawdzane umiejętności	Poprawna odpowiedź (1 p.)
Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji	Odczytanie współrzędnych wierzchołka paraboli z postaci kanonicznej funkcji kwadratowej	<b>B</b>

**Zadanie 9.**

Obszar standardów	Sprawdzane umiejętności	Poprawna odpowiedź (1 p.)
Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji	Interpretowanie współczynników we wzorze funkcji liniowej	<b>B</b>

**Zadanie 10.**

Obszar standardów	Sprawdzane umiejętności	Poprawna odpowiedź (1 p.)
Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji	Odczytywanie wartości funkcji z jej wykresu	<b>C</b>

**Zadanie 11.**

Obszar standardów	Sprawdzane umiejętności	Poprawna odpowiedź (1 p.)
Wykorzystanie i tworzenie informacji	Wyznaczanie wyrazów ciągu arytmetycznego	<b>C</b>

**Zadanie 12.**

Obszar standardów	Sprawdzane umiejętności	Poprawna odpowiedź (1 p.)
Wykorzystanie i tworzenie informacji	Wyznaczanie wyrazów ciągu geometrycznego	B

**Zadanie 13.**

Obszar standardów	Sprawdzane umiejętności	Poprawna odpowiedź (1 p.)
Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji	Obliczania liczby przekątnych wielokąta	B

**Zadanie 14.**

Obszar standardów	Sprawdzane umiejętności	Poprawna odpowiedź (1 p.)
Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji	Stosowanie związków między funkcjami trygonometrycznymi kąta ostrego do obliczenia wartości wyrażenia	A

**Zadanie 15.**

Obszar standardów	Sprawdzane umiejętności	Poprawna odpowiedź (1 p.)
Wykorzystanie i tworzenie informacji	Wyznaczanie długości boku kwadratu wpisanego w okrąg	A

**Zadanie 16.**

Obszar standardów	Sprawdzane umiejętności	Poprawna odpowiedź (1 p.)
Wykorzystanie i tworzenie informacji	Wykorzystanie twierdzenia Pitagorasa do wyznaczenia wysokości tego trójkąta równoramiennego	B

**Zadanie 17.**

Obszar standardów	Sprawdzane umiejętności	Poprawna odpowiedź (1 p.)
Wykorzystanie i tworzenie informacji	Posługiwanie się własnościami figur podobnych do obliczania długości odcinków	A

**Zadanie 18.**

Obszar standardów	Sprawdzane umiejętności	Poprawna odpowiedź (1 p.)
Wykorzystanie i tworzenie informacji	Korzystanie ze związków między kątem wpisanym i środkowym do obliczenia miary kąta	A

**Zadanie 19.**

Obszar standardów	Sprawdzane umiejętności	Poprawna odpowiedź (1 p.)
Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji	Obliczanie pola figury płaskiej z zastosowaniem funkcji trygonometrycznych	C

**Zadanie 20.**

Obszar standardów	Sprawdzane umiejętności	Poprawna odpowiedź (1 p.)
Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji	Wskazanie współczynnika kierunkowego prostej równoległej do danej prostej	B

**Zadanie 21.**

Obszar standardów	Sprawdzane umiejętności	Poprawna odpowiedź (1 p.)
Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji	Wskazanie równania okręgu o podanej długości promienia	D

**Zadanie 22.**

Obszar standardów	Sprawdzane umiejętności	Poprawna odpowiedź (1 p.)
Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji	Obliczanie odległości punktów na płaszczyźnie	C

**Zadanie 23.**

Obszar standardów	Sprawdzane umiejętności	Poprawna odpowiedź (1 p.)
Wykorzystanie i tworzenie informacji	Obliczanie pola powierzchni wielościanu	A

**Zadanie 24.**

Obszar standardów	Sprawdzane umiejętności	Poprawna odpowiedź (1 p.)
Wykorzystanie i tworzenie informacji	Obliczanie liczby krawędzi wielościanu	D

**Zadanie 25.**

Obszar standardów	Sprawdzane umiejętności	Poprawna odpowiedź (1 p.)
Wykorzystanie i tworzenie informacji	Obliczanie średniej arytmetycznej	D

**Zadania otwarte**

Za prawidłowe rozwiązanie każdego z zadań inną metodą niż przedstawiona w schemacie przyznajemy maksymalną liczbę punktów.

**Zadanie 26. (0–2)**

Obszar standardów	Sprawdzane umiejętności
Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji	Rozwiązywanie nierówności kwadratowej

**Rozwiązanie**

Znajdujemy pierwiastki trójmianu kwadratowego

- obliczamy wyróżnik trójmianu kwadratowego:

$$\Delta = 9$$

$$x_1 = \frac{1-3}{2} = -1 \quad x_2 = \frac{1+3}{2} = 2$$

albo

- stosujemy wzory Viète'a:  
 $x_1 + x_2 = 1$  oraz  $x_1 \cdot x_2 = -2$   
i stąd  $x_1 = -1$ ,  $x_2 = 2$

albo

- zapisujemy nierówność w postaci  $(x+1)(x-2) \leq 0$ . Lewą stronę nierówności możemy uzyskać np.:
  - grupując wyrazy i wyłączając wspólny czynnik,

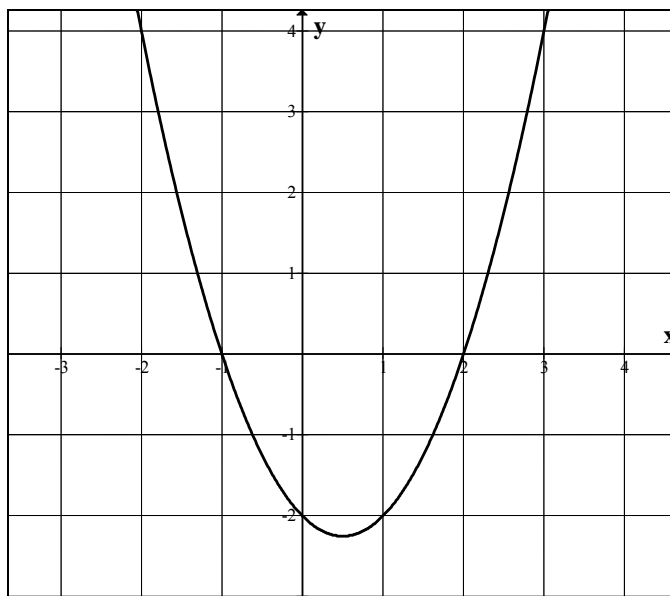
- o korzystając z postaci kanonicznej

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} = \left(x - \frac{1}{2} + \frac{3}{2}\right) \cdot \left(x - \frac{1}{2} - \frac{3}{2}\right) = (x+1)(x-2),$$

- o podając postać iloczynową

albo

- rysujemy fragment wykresu funkcji kwadratowej z zaznaczonymi miejscami zerowymi



albo

- wskazujemy pierwiastki trójmianu  $x_1 = -1$ ,  $x_2 = 2$

Podajemy rozwiązanie nierówności:  $-1 \leq x \leq 2$ .

**Schemat oceniania**

**Zdający otrzymuje ..... 1 pkt**

gdy wyznaczy pierwiastki trójmianu kwadratowego lub zapisze trójmian w postaci iloczynowej i na tym poprzestanie lub dalej popełni błędy.

**Zdający otrzymuje ..... 2 pkt**

gdy

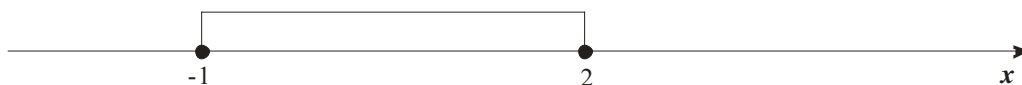
- poda zbiór rozwiązań nierówności w postaci:  $-1 \leq x \leq 2$  lub  $\langle -1, 2 \rangle$  lub  $x \in \langle -1, 2 \rangle$

albo

- sporządzi ilustrację geometryczną (oś liczbowa, wykres) i zapisze zbiór rozwiązań nierówności w postaci:  $x \geq -1$ ,  $x \leq 2$

albo

- poda zbiór rozwiązań nierówności w postaci graficznej z poprawnie zaznaczonymi końcami przedziałów:



**Zadanie 27. (0–2)**

Obszar standardów	Sprawdzane umiejętności
Wykorzystanie i tworzenie informacji	Rozwiązanie równania wielomianowego

**I sposób rozwiązania** (metoda grupowania)

Przedstawiamy lewą stronę równania w postaci iloczynowej stosując metodę grupowania wyrazów

$$x(x^2 - 4) - 7(x^2 - 4) = 0 \quad \text{lub} \quad x^2(x - 7) - 4(x - 7) = 0$$

$$(x - 7)(x^2 - 4) = 0$$

Stąd  $x = 7$  lub  $x = -2$  lub  $x = 2$ .

**Schemat oceniania I sposobu rozwiązania**

**Zdający otrzymuje ..... 1 pkt**  
gdy pogrupuje wyrazy do postaci, z której łatwo można przejść do postaci iloczynowej, np.:

$x(x^2 - 4) - 7(x^2 - 4) = 0$  lub  $x^2(x - 7) - 4(x - 7) = 0$  i na tym poprzestanie lub dalej popełni błąd

**Zdający otrzymuje ..... 2 pkt**  
gdy wyznaczy bezbłędnie wszystkie rozwiązania równania:  $x = 7$  lub  $x = -2$  lub  $x = 2$ .

**II sposób rozwiązania** (metoda dzielenia)

Stwierdzamy, że liczba 2 jest pierwiastkiem wielomianu  $x^3 - 7x^2 - 4x + 28$ . Dzielimy wielomian  $x^3 - 7x^2 - 4x + 28$  przez dwumian  $(x - 2)$ . Otrzymujemy iloraz  $(x^2 - 5x - 14)$ .

Zapisujemy równanie w postaci  $(x - 2)(x^2 - 5x - 14) = 0$ . Stąd  $(x - 2)(x + 2)(x - 7) = 0$  i  $x = 7$  lub  $x = -2$  lub  $x = 2$ .

albo

Stwierdzamy, że liczba  $-2$  jest pierwiastkiem wielomianu  $x^3 - 7x^2 - 4x + 28$ . Dzielimy wielomian  $x^3 - 7x^2 - 4x + 28$  przez dwumian  $(x + 2)$ . Otrzymujemy iloraz  $(x^2 - 9x + 14)$ .

Zapisujemy równanie w postaci  $(x + 2)(x^2 - 9x + 14) = 0$ . Stąd  $(x + 2)(x - 2)(x - 7) = 0$  i  $x = -2$  lub  $x = 2$  lub  $x = 7$ .

albo

Stwierdzamy, że liczba 7 jest pierwiastkiem wielomianu  $x^3 - 7x^2 - 4x + 28$ . Dzielimy wielomian  $x^3 - 7x^2 - 4x + 28$  przez dwumian  $(x - 7)$ . Otrzymujemy iloraz  $(x^2 - 4)$ .

Zapisujemy równanie w postaci  $(x - 7)(x^2 - 4) = 0$ . Stąd  $(x - 7)(x - 2)(x + 2) = 0$  i  $x = 7$  lub  $x = -2$  lub  $x = 2$ .



**Schemat oceniania II sposobu rozwiązania**

**Zdający otrzymuje ..... 1 pkt**

gdy

- podzieli wielomian  $x^3 - 7x^2 - 4x + 28$  przez dwumian  $(x - 2)$ , otrzyma iloraz  $(x^2 - 5x - 14)$  i na tym poprzestanie lub dalej popełni błąd

albo

- podzieli wielomian  $x^3 - 7x^2 - 4x + 28$  przez dwumian  $(x + 2)$ , otrzyma iloraz  $(x^2 - 9x + 14)$  i na tym poprzestanie lub dalej popełni błąd

albo

- podzieli wielomian  $x^3 - 7x^2 - 4x + 28$  przez dwumian  $(x - 7)$ , otrzyma iloraz  $(x^2 - 4)$  i na tym poprzestanie lub dalej popełni błąd

albo

- podzieli wielomian  $x^3 - 7x^2 - 4x + 28$  przez trójmian np.  $(x - 2)(x - 7)$  i na tym poprzestanie lub dalej popełni błąd.

**Zdający otrzymuje ..... 2 pkt**

gdy

- wyznaczy bezbłędnie wszystkie rozwiązania równania:  $x = 2, x = -2, x = 7$

**Zadanie 28. (0–2)**

Obszar standardów	Sprawdzane umiejętności
Rozumowania i argumentacji	Przeprowadzenie dowodu geometrycznego składającego się z niewielkiej liczby kroków

**Rozwiązanie**

Dorysowujemy odcinki  $AD$  i  $BE$ . Pokazujemy, że trójkąty  $ACD$  i  $BCE$  są przystające:

- $|AC| = |BC|$ , bo trójkąt  $ABC$  jest równoramienny
- $|CD| = |CE|$ , bo trójkąt  $CDE$  jest równoramienny
- $|\sphericalangle ACD| = 90^\circ - |\sphericalangle DCB| = |\sphericalangle BCE|$
- Stosujemy cechę przystawania  $bkb$

**Schemat oceniania**

**Zdający otrzymuje ..... 1 pkt**

gdy

- napisze, że trójkąty  $ACD$  i  $BCE$  są przystające i wyprowadzi stąd wniosek, że  $|AD| = |BE|$

albo

- zapisze, że  $|AC| = |BC|$ ,  $|CD| = |CE|$  i  $\sphericalangle ACD = \sphericalangle BCE$

**Zdający otrzymuje ..... 2 pkt**

gdy poprawnie uzasadni, że trójkąty  $ACD$  i  $BCE$  są przystające i wyprowadzi stąd wniosek, że  $|AD| = |BE|$ . Wymagamy udowodnienia równości kątów  $ACD$  i  $BCE$ .

**Zadanie 29. (0–2)**

Obszar standardów	Sprawdzane umiejętności
Użycie i tworzenie strategii	Wyznaczanie wartości funkcji trygonometrycznych kąta ostrego

**I sposób rozwiązania** (jedyńka trygonometryczna)

$$\begin{cases} \sin \alpha = \frac{5}{13} \\ \cos \alpha = \frac{12}{13} \\ \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin \alpha = \frac{5}{12} \cos \alpha \\ \left(\frac{5}{12} \cos \alpha\right)^2 + \cos^2 \alpha = 1 \end{cases}$$

$$\frac{25}{144} \cos^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\cos^2 \alpha = \frac{144}{169} \quad \text{i} \quad \cos \alpha > 0$$

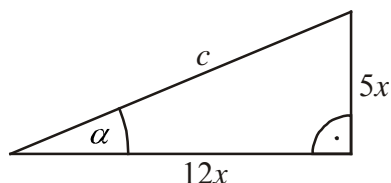
$$\cos \alpha = \frac{12}{13}$$

$$\begin{cases} \cos \alpha = \frac{12}{5} \sin \alpha \\ \left(\frac{12}{5} \sin \alpha\right)^2 + \sin^2 \alpha = 1 \end{cases}$$

$$\frac{144}{25} \sin^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$$

$$\sin^2 \alpha = \frac{25}{169} \quad \text{i} \quad \sin \alpha > 0$$

$$\sin \alpha = \frac{5}{13} \quad \text{albo} \quad \cos \alpha = \frac{12}{13} \quad \text{i} \quad \alpha = \frac{12}{13}$$

**II sposób rozwiązania** (trójkąt prostokątny)

$$c^2 = (12x)^2 + (5x)^2$$

$$c = 13x$$

$$\cos \alpha = \frac{12}{13}$$

**Schemat oceniania**

Zdający otrzymuje ..... 1 pkt  
gdy

- przekształcił dane wyrażenie do postaci wyrażenia zawierającego tylko  $\cos \alpha$  i wykorzystał „jedyńkę trygonometryczną”, np.  $\sin \alpha = \frac{5}{12} \cos \alpha$ ,  $\frac{25}{144} \cos^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$  i na tym poprzestanie lub dalej popełni błąd

albo

- przekształcił dane wyrażenie do postaci wyrażenia zawierającego tylko  $\sin \alpha$  i wykorzystał „jedyńkę trygonometryczną”, np.  $\cos \alpha = \frac{12}{5} \sin \alpha$ ,  $\frac{144}{25} \sin^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$  i na tym poprzestanie lub dalej popełni błąd

albo

- przekształcił dane wyrażenie do postaci wyrażenia zawierającego tylko  $\sin \alpha$  np.  $\frac{25}{144} = \frac{\sin^2 \alpha}{1 - \sin^2 \alpha}$  lub  $25 - 25 \sin^2 \alpha = 144 \sin^2 \alpha$  i na tym poprzestanie lub dalej popełni błąd

albo

- przekształci dane wyrażenie do postaci wyrażenia zawierającego tylko  $\sin \alpha$  i  $\operatorname{tg} \alpha$ , np.  $\operatorname{tg}^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$  lub  $\cos^2 \alpha (\operatorname{tg}^2 \alpha + 1) = 1$  i na tym poprzestanie lub dalej popełni błąd

albo

- obliczy długość przeciwprostokątnej trójkąta prostokątnego o przyprostokątnych długości 12 i 5 (lub ich wielokrotności) z błędem rachunkowym oraz zapisze  $\sin \alpha$  i na tym zakończy

albo

- obliczy długość przeciwprostokątnej trójkąta prostokątnego o przyprostokątnych długości 12 i 5 (lub ich wielokrotności) z błędem rachunkowym i zapisze  $\cos \alpha$

albo

- narysuje trójkąt prostokątny o przyprostokątnych długości 12 i 5 (lub ich wielokrotności), obliczy długość przeciwprostokątnej i zaznaczy w tym trójkącie poprawnie kąt  $\alpha$

albo

- odczyta z tablic przybliżoną wartość kąta  $\alpha$ :  $\alpha \approx 22^\circ$  (akceptujemy wynik  $\alpha \approx 23^\circ$ ) i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy

**Zdający otrzymuje ..... 2 pkt**

gdy

- obliczy wartość  $\cos \alpha$ :  $\cos \alpha = \frac{12}{13}$

albo

- obliczy przybliżoną wartość  $\cos \alpha$ :  $\cos 22^\circ \approx 0,9272$  lub  $\cos 23^\circ \approx 0,9205$

**Zadanie 30. (0–2)**

Obszar standardów	Sprawdzane umiejętności
Rozumowania i argumentacji	Wykazanie prawdziwości nierówności

**I sposób rozwiązania**

Przekształcamy nierówność w sposób równoważny:

$$\frac{a^2 + 1}{a + 1} \geq \frac{a + 1}{2}$$

$$2(a^2 + 1) \geq (a + 1)^2$$

$$2a^2 + 2 \geq a^2 + 2a + 1$$

$$a^2 - 2a + 1 \geq 0$$

$$(a - 1)^2 \geq 0$$

co kończy dowód.

$$\frac{a^2 + 1}{a + 1} - \frac{a + 1}{2} \geq 0$$

$$\frac{2(a^2 + 1) - (a + 1)^2}{2(a + 1)} \geq 0$$

$$\frac{a^2 - 2a + 1}{2(a + 1)} \geq 0$$

$$\frac{(a - 1)^2}{2(a + 1)} \geq 0$$

co kończy dowód.

**II sposób rozwiązania**

Dla każdej liczby rzeczywistej  $a$  prawdziwa jest nierówność  $(a-1)^2 \geq 0$ .

Przekształcamy tę nierówność w sposób równoważny:

$$(a-1)^2 + (a+1)^2 \geq (a+1)^2$$

$$2a^2 + 2 \geq (a+1)^2$$

$$2(a^2 + 1) \geq (a+1)^2$$

Ponieważ  $a > 0$ , więc  $\frac{a^2 + 1}{a+1} \geq \frac{a+1}{2}$

co kończy dowód.

**III sposób rozwiązania** (dowód nie wprost)

Przypuśćmy, że dla pewnego  $a > 0$  mamy  $\frac{a^2 + 1}{a+1} < \frac{a+1}{2}$ . Przekształcamy tę nierówność

tak, jak w I sposobie rozwiązania do postaci, np.  $(a-1)^2 < 0$  i stwierdzamy, że otrzymaliśmy sprzeczność.

**Schemat oceniania**

**Zdający otrzymuje .....1 pkt**  
gdy

- otrzyma nierówność  $a^2 - 2a + 1 \geq 0$  lub  $\frac{a^2 - 2a + 1}{2(a+1)} \geq 0$  i na tym poprzestanie lub w dalszej części dowodu popełni błąd

albo

- stosując metodę dowodu nie wprost otrzyma nierówność  $(a-1)^2 < 0$  i nie zapisze żadnych wniosków lub zapisze błędne wnioski

albo

- stosując II sposób rozwiązania otrzyma nierówność  $2a^2 + 2 \geq (a+1)^2$  i nie zapisze żadnych wniosków lub zapisze błędne wnioski.

**Zdający otrzymuje .....2 pkt**  
gdy

- zapisze nierówność  $a^2 - 2a + 1 \geq 0$  i uzasadni, że wszystkie liczby dodatnie  $a$  spełniają tę nierówność

albo

- zapisze nierówność  $\frac{a^2 - 2a + 1}{2(a+1)} \geq 0$  i uzasadni, że wszystkie liczby dodatnie  $a$  spełniają tę nierówność

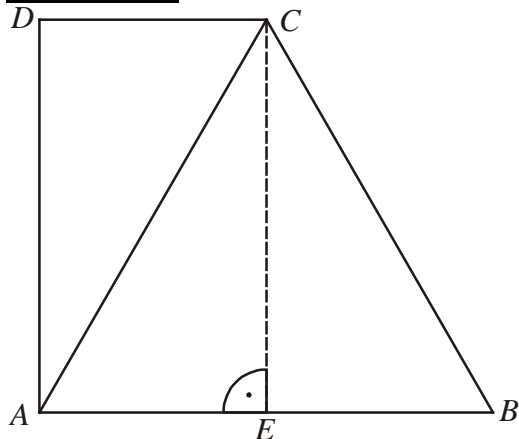
albo

- stosując metodę dowodu nie wprost otrzyma nierówność  $(a-1)^2 < 0$  i zapisze, że otrzymana nierówność nie zachodzi dla żadnej liczby rzeczywistej  $a$ .

**Zadanie 31. (0–2)**

Obszar standardów	Sprawdzane umiejętności
Wykorzystanie i tworzenie informacji	Wykorzystanie związków miarowych w trójkącie prostokątnym i równobocznym

**Rozwiązanie**



Prowadzimy wysokość  $CE$  trójkąta równobocznego  $ABC$ .

Wówczas  $|AE| = 3$  i stąd  $|CD| = |AE| = 3$ .

Następnie zapisujemy, że  $|BC| = |AB| = 6$

oraz  $|DA| = |CE| = \frac{6\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$ .

Stąd obwód trapezu jest równy

$$6 + 6 + 3 + 3\sqrt{3} = 15 + 3\sqrt{3}.$$

**Schemat oceniania**

**Zdający otrzymuje ..... 1 pkt**  
 gdy

- prawidłowo podzielił trapez na trójkąty i poprawnie obliczył długość krótszej podstawy trapezu ( $|DC| = 3$ ) i na tym zakończył lub popełnił błędy rachunkowe przy obliczaniu obwodu trapezu

albo

- prawidłowo podzielił trapez na trójkąty i poprawnie obliczył wysokość trapezu ( $h = 3\sqrt{3}$ ) i na tym zakończył lub popełnił błędy rachunkowe przy obliczaniu obwodu trapezu

**Zdający otrzymuje ..... 2 pkt**  
 gdy obliczył poprawnie obwód trapezu:  $15 + 3\sqrt{3}$ .

**Zadanie 32. (0–4)**

Obszar standardów	Sprawdzane umiejętności
Użycie i tworzenie strategii	Obliczanie objętości wielościanu

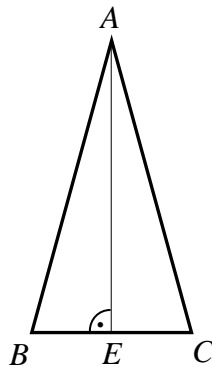
**Uwaga**

Strategia rozwiązania tego zadania sprowadza się do realizacji następujących etapów rozwiązania:

- obliczenie długości krawędzi  $AB$  lub  $AC$  podstawy ostrosłupa bądź wysokości  $DE$  ściany bocznej  $BCD$
- zastosowanie poprawnej metody obliczenia pola podstawy i obliczenie tego pola
- obliczenie objętości ostrosłupa

**I sposób rozwiązania** (krawędź podstawy, wysokość  $AE$  podstawy i „zwykły” wzór na pole trójkąta  $ABC$ )

Z twierdzenia Pitagorasa zastosowanego do trójkąta  $ABD$  wynika, że  $|AB|^2 = |BD|^2 - |AD|^2 = 25$ , stąd  $|AB| = 5$ . Podobnie z twierdzenia Pitagorasa zastosowanego do trójkąta  $ACD$  wynika, że  $|AC| = 5$ .



Rysujemy trójkąt  $ABC$  i prowadzimy w nim wysokość  $AE$ . Trójkąt  $ABC$  jest równoramienny ( $|AB| = |AC|$ ), więc  $|BE| = |EC| = 3$ . Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta  $ABE$  mamy  $|AE|^2 = |AB|^2 - |BE|^2 = 16$ , stąd  $|AE| = 4$ .

Zatem  $P_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 4 = 12$ . Objętość ostrosłupa jest równa  $V = \frac{1}{3} \cdot 12 \cdot 12 = 48$ .

**Schemat oceniania I sposobu rozwiązania**

**Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania** ..... 1 pkt

Obliczenie długości krawędzi  $AB$  lub  $AC$  podstawy ostrosłupa:  $|AB| = 5$ ,  $|AC| = 5$ .

**Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp** ..... 2 pkt

Obliczenie wysokości  $AE$  trójkąta  $ABC$ :  $|AE| = 4$ .

**Uwaga**

Zdający nie musi uzasadniać, że  $|BE| = |EC|$ , wystarczy, że poprawnie stosuje twierdzenie Pitagorasa do obliczenia wysokości  $AE$  trójkąta  $ABC$ .

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania** ..... 3 pkt

Obliczenie pola podstawy ostrosłupa:  $P_{ABC} = 12$ .

**Rozwiązanie pełne** ..... 4 pkt

Obliczenie objętości ostrosłupa:  $V = 48$ .

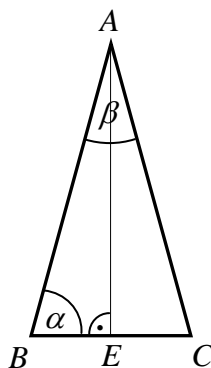
**Uwaga**

Jeśli zdający przy obliczaniu wysokości trójkąta  $ABC$  lub pola tego trójkąta (pola podstawy ostrosłupa) nie stosuje poprawnej metody (co przekreśla poprawność strategii rozwiązania zadania), np. przyjmie, że środkowa  $CF$  trójkąta  $ABC$  jest jego wysokością, to za całe rozwiązanie przyznajemy co najwyżej **1 punkt** (zdający nie osiągnął istotnego postępu).

**II sposób rozwiązania** (krawędź podstawy, cosinus jednego z kątów trójkąta  $ABC$ , wzór z sinusem na pole trójkąta  $ABC$ )

Z twierdzenia Pitagorasa zastosowanego do trójkąta  $ABD$  wynika, że

$|AB|^2 = |BD|^2 - |AD|^2 = 25$ , stąd  $|AB| = 5$ . Podobnie z twierdzenia Pitagorasa zastosowanego do trójkąta  $ACD$  wynika, że  $|AC| = 5$ .



Rysujemy trójkąt  $ABC$  i prowadzimy w nim wysokość  $AE$  i oznaczamy  $\alpha = \sphericalangle ABC$ .

Wariant I obliczenia pola podstawy.

Trójkąt  $ABC$  jest równoramienny ( $|AB| = |AC|$ ), więc  $|BE| = |EC| = 3$ .

Stąd  $\cos \alpha = \frac{|BE|}{|BA|} = \frac{3}{5}$ . Zatem  $\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \sqrt{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2} = \frac{4}{5}$ .

Pole trójkąta  $ABC$  jest równe  $P_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot |BC| \cdot |BA| \sin \alpha = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 5 \cdot \frac{4}{5} = 12$ .

Wariant II obliczenia pola podstawy.

Z twierdzenia cosinusów dla trójkąta  $ABC$  obliczamy  $\cos \beta$ :

$6^2 = 5^2 + 5^2 - 2 \cdot 5 \cdot 5 \cos \beta$ , stąd  $\cos \beta = \frac{7}{25}$ .

Następnie obliczamy  $\sin \beta = \sqrt{1 - \cos^2 \beta} = \sqrt{1 - \left(\frac{7}{25}\right)^2} = \frac{24}{25}$ .

Pole trójkąta  $ABC$  jest równe  $P_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot |AC| \sin \beta = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 5 \cdot \frac{24}{25} = 12$ .

Po obliczeniu pola podstawy obliczamy objętość  $V$  ostrosłupa

$V = \frac{1}{3} \cdot 12 \cdot 12 = 48$ .

**Schemat oceniania II sposobu rozwiązania**

**Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania ..... 1 pkt**

Obliczenie długości krawędzi  $AB$  lub  $AC$  podstawy ostrosłupa:  $|AB| = 5$ ,  $|AC| = 5$ .

**Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp ..... 2 pkt**

Obliczenie sinusa jednego z kątów trójkąta  $ABC$ :  $\sin \alpha = \frac{4}{5}$  lub  $\sin \beta = \frac{24}{25}$ .

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania.....3 pkt**

Obliczenie pola podstawy ostrosłupa:  $P_{ABC} = 12$ .

**Rozwiązanie pełne .....4 pkt**

Obliczenie objętości ostrosłupa:  $V = 48$ .

**Uwaga**

Jeśli zdający przy obliczaniu wysokości trójkąta  $ABC$  lub pola tego trójkąta (pola podstawy ostrosłupa) nie stosuje poprawnej metody (co przekreśla poprawność strategii rozwiązania zadania), np. zapisze, że  $\sin \alpha = \frac{|BE|}{|BA|} = \frac{3}{5}$ , to za całe rozwiązanie przyznajemy co najwyżej **1 punkt** (zdający nie osiągnął istotnego postępu).

**III sposób rozwiązania** (krawędź podstawy, wzór Herona na pole trójkąta  $ABC$ )

Z twierdzenia Pitagorasa zastosowanego do trójkąta  $ABD$  wynika, że  $|AB|^2 = |BD|^2 - |AD|^2 = 25$ , stąd  $|AB| = 5$ . Podobnie z twierdzenia Pitagorasa zastosowanego do trójkąta  $ACD$  wynika, że  $|AC| = 5$ . Pole trójkąta  $ABC$  obliczamy ze wzoru Herona

$$P_{ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}, \text{ gdzie } p = \frac{5+5+6}{2} = 8, \quad p-a = 8-6 = 2,$$

$$p-b = p-c = 8-3 = 5.$$

$$P_{ABC} = \sqrt{8 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5} = 12.$$

$$\text{Objętość ostrosłupa jest równa } V = \frac{1}{3} \cdot P_{ABC} \cdot |AD| = \frac{1}{3} \cdot 12 \cdot 12 = 48.$$

**Schemat oceniania III sposobu rozwiązania**

**Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania .....1 pkt**

Obliczenie długości krawędzi  $AB$  lub  $AC$  podstawy ostrosłupa:  $|AB| = 5$ ,  $|AC| = 5$ .

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania.....3 pkt**

Obliczenie pola podstawy ostrosłupa:  $P_{ABC} = 12$ .

**Uwaga**

Zdający otrzymuje **2 punkty**, jeśli poprawnie zastosuje wzór Herona, popełni błąd rachunkowy przy obliczaniu pola trójkąta  $ABC$  i na tym zakończy.

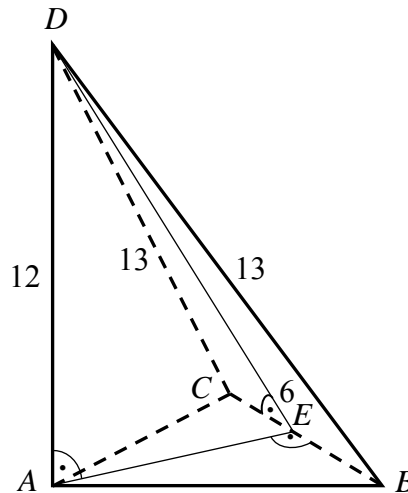
**Rozwiązanie pełne .....4 pkt**

Obliczenie objętości ostrosłupa:  $V = 48$ .



**IV sposób rozwiązania** (wysokość ściany bocznej  $BCD$ , wysokość  $AE$  podstawy i „zwykły” wzór na pole trójkąta  $ABC$ )

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.



Trójkąt  $BCD$  jest równoramienny, więc środek  $E$  boku  $BC$  jest spodkiem wysokości  $DE$  tego trójkąta. Z twierdzenia Pitagorasa zastosowanego do trójkąta  $BED$  wynika, że

$$|DE|^2 = |BD|^2 - |BE|^2 = 13^2 - 3^2 = 160.$$

Z twierdzenia Pitagorasa w trójkącie  $ADE$  obliczamy wysokość  $AE$  trójkąta  $ABC$

$$|AE|^2 = |DE|^2 - |AD|^2 = 160 - 12^2 = 16, \text{ stąd } |AE| = 4.$$

$$\text{Pole trójkąta } ABC \text{ jest równe } P_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 4 = 12.$$

$$\text{Objętość ostrosłupa jest równa } V = \frac{1}{3} \cdot 12 \cdot 12 = 48.$$

**Schemat oceniania IV sposobu rozwiązania**

**Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania ..... 1 pkt**

Obliczenie wysokości  $DE$  ściany bocznej  $BCD$  ostrosłupa (lub kwadratu tej wysokości):

$$|DE| = 4\sqrt{10}.$$

**Uwaga**

Zdający nie musi uzasadniać, że  $|BE| = |EC|$ , wystarczy, że poprawnie stosuje twierdzenia Pitagorasa do obliczenia wysokości  $DE$  trójkąta  $BCD$ .

**Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp ..... 2 pkt**

Obliczenie wysokości  $AE$  trójkąta  $ABC$ :  $|AE| = 4$ .

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania ..... 3 pkt**

Obliczenie pola podstawy ostrosłupa:  $P_{ABC} = 12$ .

**Rozwiązanie pełne ..... 4 pkt**

Obliczenie objętości ostrosłupa:  $V = 48$ .

**Zadanie 33. (0–4)**

Obszar standardów	Sprawdzane umiejętności
Modelowanie matematyczne	Obliczanie prawdopodobieństwa z zastosowaniem klasycznej definicji prawdopodobieństwa

**Rozwiązanie** (model klasyczny)

$\Omega$  jest zbiorem wszystkich par  $(a, b)$  takich, że  $a, b \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ . Mamy model klasyczny.

$$|\Omega| = 36.$$

Zdarzeniu  $A$  sprzyjają następujące zdarzenia elementarne:

$$(2, 6), (4, 3), (4, 6), (6, 2), (6, 4), (6, 6)$$

$$\text{Zatem } |A| = 6 \text{ i stąd } P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}.$$

**Schemat oceniania**

**Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do całkowitego rozwiązania zadania ..... 1 pkt**

Zdający zapisze, że  $|\Omega| = 36$  i na tym zakończy lub dalej rozwiązuje błędnie.

**Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp ..... 2 pkt**

Zdający zapisze, że  $|\Omega| = 36$  oraz, że  $A = \{(2, 6), (4, 3), (4, 6), (6, 2), (6, 4), (6, 6)\}$  i na tym zakończy lub dalej rozwiązuje błędnie.

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania ..... 3 pkt**

Zdający zapisze, że  $|\Omega| = 36$  oraz obliczy  $|A| = 6$  i na tym zakończy lub dalej rozwiązuje błędnie.

**Uwaga**

Jeżeli zdający wypisze bezbłędnie wszystkie zdarzenia elementarne sprzyjające zdarzeniu  $A$ , ale błędnie zapisze ich liczbę (np.  $|A| = 5$  albo  $|A| = 7$ ) i konsekwentnie rozwiąże zadanie do końca, to otrzymuje 3 punkty.

**Rozwiązanie bezbłędne ..... 4 pkt**

Obliczenie prawdopodobieństwa zdarzenia  $A$ :  $P(A) = \frac{1}{6}$

**Uwaga**

Jeśli zdający ograniczy swoje rozwiązanie do zapisu  $|\Omega| = 36$ ;  $|A| = 6$  oraz  $P(A) = \frac{1}{6}$ , to otrzymuje 1 pkt.

**Zadanie 34. (0–5)**

Obszar standardów	Sprawdzane umiejętności
Modelowanie matematyczne	Rozwiązanie zadania, umieszczonego w kontekście praktycznym, prowadzącego do równania kwadratowego

**Rozwiązanie**

Oznaczmy przez  $x$  długość (w metrach) basenu w pierwszym hotelu i przez  $y$  szerokość (w metrach) tego basenu. Zapisujemy układ równań:

$$\begin{cases} x \cdot y = 240 \\ (x + 5) \cdot (y + 2) = 350 \end{cases}$$

Przekształcamy drugie równanie w sposób równoważny:  $x \cdot y + 2x + 5y + 10 = 350$ , podstawiamy do tego równania  $x \cdot y = 240$  i wyznaczamy z tak przekształconego równania

niewiadomą  $x$ :  $x = \frac{100 - 5y}{2}$ . Wyznaczoną wartość  $x$  podstawiamy do pierwszego

równania  $\frac{100 - 5y}{2} \cdot y = 240$ , które następnie przekształcamy do postaci:

$$y^2 - 20y + 96 = 0. \text{ Rozwiązaniami tego równania są: } y_1 = 8, y_2 = 12.$$

Zatem:

- jeżeli  $y = 8$ , to  $x = 30$  i wtedy basen w pierwszym hotelu ma wymiary:  $30 \text{ m} \times 8 \text{ m}$ , zaś basen w drugim hotelu:  $35 \text{ m} \times 10 \text{ m}$ ,
- jeżeli  $y = 12$ , to  $x = 20$  i wtedy basen w pierwszym hotelu ma wymiary:  $20 \text{ m} \times 12 \text{ m}$ , zaś basen w drugim hotelu:  $25 \text{ m} \times 14 \text{ m}$ .

**Schemat oceniania**

**Rozwiązanie, w którym postępowanie jest niewielkie, ale konieczne na drodze do pełnego rozwiązania zadania ..... 1 pkt**

Wprowadzenie oznaczeń, na przykład:  $x, y$  – wymiary basenu w pierwszym hotelu i zapisanie równania  $x \cdot y = 240$  albo równania  $(x + 5) \cdot (y + 2) = 350$ .

**Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp ..... 2 pkt**

Zapisanie układu równań z niewiadomymi  $x$  i  $y$ , np.

$$\begin{cases} x \cdot y = 240 \\ (x + 5) \cdot (y + 2) = 350 \end{cases}$$

**Uwaga**

Zdający nie musi zapisywać układu równań, może od razu zapisać równanie z jedną niewiadomą.

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania ..... 3 pkt**

Zapisanie równania z jedną niewiadomą  $x$  lub  $y$ , np:

$$(x + 5) \cdot \left( \frac{240}{x} + 2 \right) = 350 \quad \text{albo} \quad \left( \frac{240}{y} + 5 \right) \cdot (y + 2) = 350$$

**Rozwiązanie prawie całkowite..... 4 pkt**

Doprowadzenie równania wymiernego do równania kwadratowego oraz rozwiązanie równania kwadratowego:

$$x^2 - 50x + 600 = 0, \text{ skąd } x = 20 \text{ lub } x = 30$$

albo

$$y^2 - 20y + 96 = 0, \text{ skąd } y = 8 \text{ lub } y = 12$$

**Rozwiązanie zadania do końca, lecz z usterkami, które jednak nie przekreślają poprawności rozwiązania (np. błędy rachunkowe) ..... 4 pkt**

Zdający popełnia błąd rachunkowy w rozwiązaniu równania (ale otrzymuje dwa rozwiązania) i konsekwentnie do popełnionego błędu oblicza wymiary obu basenów.

**Rozwiązanie pełne ..... 5 pkt**

Zapisanie wymiarów obu basenów:

Basen w pierwszym hotelu ma wymiary  $30 \text{ m} \times 8 \text{ m}$  i w drugim hotelu  $35 \text{ m} \times 10 \text{ m}$

lub basen w pierwszym hotelu ma wymiary  $20 \text{ m} \times 12 \text{ m}$  i w drugim  $25 \text{ m} \times 14 \text{ m}$ .