KLUCZ ODPOWIEDZI

DO ZADAŃ ZAMKNIĘTYCH

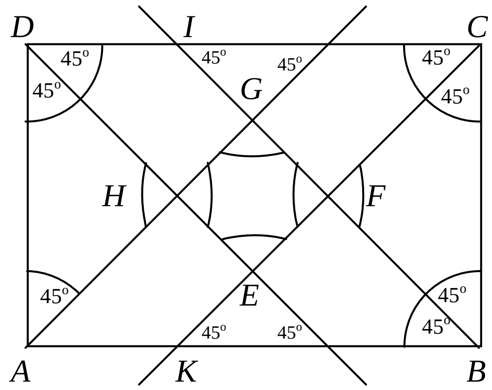
NR ZADANIA	POPRAWNA ODPOWIEDŹ
1	D
2	C
3	C
4	B
5	D
6	A
7	D
8	D
9	A
10	C
11	B
12	A
13	A
14	B
15	D
16	B
17	C
18	A
19	B
20	D

MODEL OCENIANIA ZADAN OTWARTYCH

Zadanie 21 (*2 pkt)*

Uzasadnij, że punkty przecięcia dwusiecznych kątów wewnętrznych prostokąta ABCD są wierzchołkami kwadratu.

Rozwiązanie



Czworokąt *EFGH* jest kwadratem, ponieważ :

- posiada cztery kąty proste,
- $|IB = |KC|| \Leftrightarrow |BF| + |FG| + |GI| = |CF| + |EF| + |EK|$
- $|BF| = |CF|$ *i* $|GI| = |EK|$

Stad $|FG| = |EF|$, więc długości boków czworokąta *EFGH* są równe.

Schemat oceniania:

Zdający otrzymuje .... 1 pkt
gdy narysuje dwusieczne kątów i zaznaczy kąty o mierze 45°.

Zdający otrzymuje .... 2 pkt
gdy wskaże kąty proste i stwierdzi, że otrzymana figura jest kwadratem

Uwaga
Jeśli zdający nie zaznaczy kątów 45^0, otrzymuje 0 pkt

Zadanie 22 (*2 pkt)*

W kwadracie ABCD dane są wierzchołek A=(1,-2) i środek symetrii S=(2,1). Oblicz pole kwadratu ABCD.

I sposób rozwiązania:

Obliczamy długość odcinka $\left|AS\right| = \sqrt{(2-1)^2 + (1+2)^2} = \sqrt{10}$.

Obliczamy pole kwadratu $P = \frac{1}{2}d_1 d_2$, gdzie $d_1 = d_2 = 2\left|AS\right| = 2\sqrt{10}$, a zatem $P = 20$.

II sposób rozwiązania:

Obliczamy długość odcinka $\left|AS\right| = \sqrt{(2-1)^2+(1+2)^2} = \sqrt{10}$.

Obliczamy długość boku kwadratu $\left|AS\right| = \frac{1}{2}a\sqrt{2}$, a zatem $a = 2\sqrt{5}$.

Stąd otrzymujemy pole kwadratu $P = 20$.

Schemat oceniania:

Zdający otrzymuje .... 1 pkt

gdy:

- obliczy długość odcinka AS : $\left|AS\right| = \sqrt{10}$

albo

- obliczy długość odcinka AC : $\left|AC\right| = 2\sqrt{10}$

Zdający otrzymuje .... 2 pkt

gdy obliczy lub poda pole kwadratu $P = 20$.

Zadanie 23 (*2 pkt)*

Rzucamy czerwoną i zieloną sześcienną kostką do gry. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na wyrzuceniu takiej samej liczby oczek na obu kostkach.

Rozwiązanie

A – zdarzenie losowe polegające na wyrzuceniu takiej samej liczby oczek na obu kostkach.

Obliczamy liczbę wszystkich zdarzeń elementarnych tego doświadczenia $\overline{\overline{\Omega}} = 36$.

Obliczamy liczbę zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu losowemu A: $\overline{\overline{A}} = 6$.

Obliczamy prawdopodobieństwo zdarzenia losowego A: $P(A) = \frac{1}{6}$

Schemat oceniania:

Zdający otrzymuje .... 1 pkt

gdy poprawnie obliczy $\overline{\overline{\Omega}} = 36$ i $\overline{\overline{A}} = 6$

Zdający otrzymuje .... 2 pkt

gdy poda prawdopodobieństwo zdarzenia losowego A : $P(A) = \frac{1}{6}$

Uwaga:

Gdy zdający błędnie wyznaczy $\overline{\overline{\Omega}}$ lub $\overline{\overline{A}}$ otrzymuje 0 punktów za całe zadanie.

Zadanie 24 (*2 pkt)*

Wiedząc, że α jest kątem ostrym i $tg\alpha + \frac{1}{tg\alpha} = 4$, oblicz $tg^2\alpha + \left(\frac{1}{tg\alpha}\right)^2$.

<u>Rozwiązanie</u>

Równanie $tg\alpha + \frac{1}{tg\alpha} = 4$ podnosimy stronami do kwadratu.

$tg^2\alpha + \frac{1}{tg^2\alpha} + 2tg\alpha\frac{1}{tg\alpha} = 16$

$tg^2\alpha + \frac{1}{tg^2\alpha} + 2 = 16$

$tg^2\alpha + \frac{1}{tg^2\alpha} = 14$

<u>Schemat oceniania:</u>

Zdający otrzymuje .... 1 pkt

gdy:

- z podanego równania obliczy $tg\alpha$, np.: $tg\alpha = 2-\sqrt{3}$ lub $tg\alpha = 2+\sqrt{3}$ i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy

albo

- podniesie podane równanie do kwadratu: $tg^2\alpha + \frac{1}{tg^2\alpha} + 2tg\alpha\frac{1}{tg\alpha} = 16$ i dalej popełnia błędy

Zdający otrzymuje .... 2 pkt

gdy poprawnie obliczy wartość podanej sumy: $tg^2\alpha + \frac{1}{tg^2\alpha} = 14$

Zadanie 25 (*2 pkt)*

Wyznacz wszystkie liczby całkowite spełniające nierówność $x^2 - 3x - 10 \geq 0$.

<u>Rozwiązanie</u>

Obliczamy miejsca zerowe funkcji kwadratowej $f(x) = x^2 - 3x - 10$: $x_1 = 5$ $x_2 = -2$

lub zapisujemy nierówność w postaci $(x-5)(x+2) \leq 0$.

Rysujemy fragment wykresu funkcji kwadratowej i na jego podstawie odczytujemy rozwiązania nierówności: $x \in \langle -2,5\rangle$.

Wyznaczamy wszystkie liczby całkowite należące do przedziału $\langle -2,5\rangle$: $x \in \{-2,-1,0,1,2,3,4,5\}$.

Schemat oceniania:

Zdający otrzymuje .... 1 pkt
gdy:

- obliczy lub poda prawidłowo pierwiastki trójmianu kwadratowego $x_1 = 5$, $x_2 = -2$ i na tym poprzestanie lub błędnie zapisze zbiór rozwiązań nierówności

albo

- rozłoży trójmian kwadratowy na czynniki liniowe i na tym poprzestanie lub błędnie rozwiąże nierówność

albo

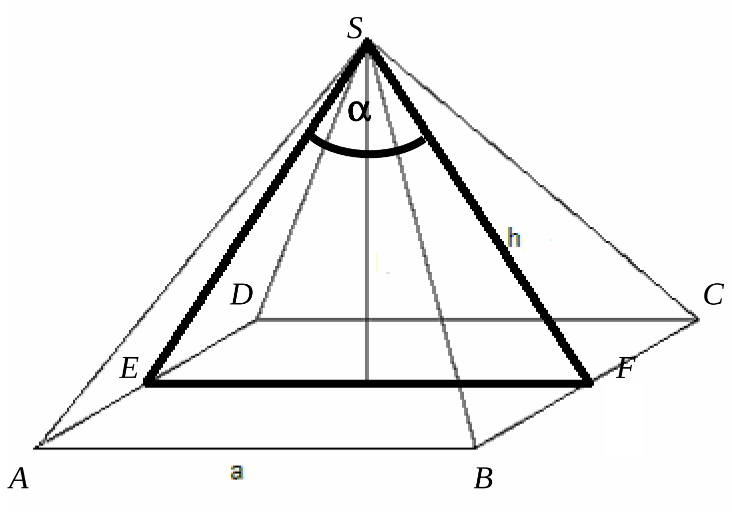
- popełni błąd rachunkowy przy obliczaniu wyróżnika lub pierwiastków trójmianu kwadratowego i konsekwentnie do popełnionego błędu rozwiąże zadanie

Zdający otrzymuje .... 2 pkt
gdy wyznaczy wszystkie liczby całkowite spełniające podaną nierówność kwadratową $x \in \{-2,-1,0,1,2,3,4,5\}$

Zadanie 26 *(4 pkt)*

W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym o krawędzi podstawy 18 cm, kąt między wysokościami przeciwległych ścian bocznych ma miarę α=60^0. Oblicz pole powierzchni bocznej tego ostrosłupa. Wykonaj odpowiedni rysunek i zaznacz kąt α.

Rozwiązanie



Zauważmy, że ΔEFS jest równoboczny, a zatem wysokość ściany bocznej $h = 18cm$.
Obliczamy pole powierzchni bocznej ostrosłupa:

$P = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot a \cdot h$, gdzie $a = 18cm$

$P = 2 \cdot 18^2 = 648cm^2$

Schemat oceniania:

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... 1 pkt
Wykonanie rysunku ostrosłupa prawidłowego czworokątnego i zaznaczenie kąta α .

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 2 pkt

- Zapisanie, że trójkąt EFS jest równoboczny, a zatem wysokość ściany bocznej $h = 18cm$
- Zapisanie związku umożliwiającego obliczenie długości wysokości ściany bocznej, np. $\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{9}{h}$

Uwaga
Jeżeli zdający nieprawidłowo zapisze związek dla użytej funkcji trygonometrycznej, to nie pokonał zasadniczych trudności zadania i nie przyznajemy punktów za dalszą część rozwiązania zadania.

Rozwiązanie zadania do końca lecz z usterkami, które jednak nie przekreślają poprawności rozwiązania (np. błędy rachunkowe) .... 3 pkt

- Jeżeli zdający przy obliczaniu pola ściany bocznej popełnił błąd rachunkowy albo nie napisze ułamka $\frac{1}{2}$ we wzorze na pole trójkąta i konsekwentnie rozwiąże zadanie do końca
- Jeżeli zdający przy obliczaniu pola powierzchni bocznej ostrosłupa popełnił błąd rachunkowy albo nie napisze 4 we wzorze na pole powierzchni bocznej i konsekwentnie rozwiąże zadanie do końca

Rozwiązanie pełne .... 4 pkt
Obliczenie pola powierzchni bocznej ostrosłupa $P = 648cm^2$.
(Należy akceptować również wynik bez podania jednostki).

Uwaga
Przyznajemy 0 punktów za zadanie , gdy zdający zaznaczy inny kąt lub narysuje inną bryłę.

Zadanie 27 *(5 pkt)*

Wyznacz wzór funkcji $f(x) = 2x^2 + bx + c$ w postaci kanonicznej wiedząc, że jej miejsca zerowe są rozwiązaniami równania | x – 3 | = 5.

Rozwiązanie:
Rozwiązujemy równanie $|x-3| = 5$

$x - 3 = 5$ lub $x - 3 = -5$

$x = 8$ lub $x = -2$

A zatem $f(x) = 2(x-8)(x+2)$

Obliczamy współrzędne wierzchołka paraboli

$p = \frac{x_1 + x_2}{2}$, stąd $p = 3$

$q = f(p) = 2 \cdot (3-8)(3+2) = -50$

Postać kanoniczna funkcji kwadratowej f wyraża się wzorem $f(x) = 2(x-3)^2 - 50$.

Schemat oceniania:

Rozwiązanie, w którym postęp jest wprawdzie niewielki, ale konieczny na drodze do całkowitego rozwiązania zadania .... 1 pkt

- Rozwiązanie równania $|x-3|=5$: $x=8$ lub $x=-2$

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... 2 pkt

- Zapisanie funkcji f w postaci iloczynowej $f(x)=2(x-8)(x+2)$

albo

- Wyznaczenie współczynników b,c trójmianu kwadratowego: $b=-12$, $c=-32$ lub zapisanie funkcji w postaci ogólnej $f(x)=2x^2-12x-32$

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 3 pkt

- Obliczenie współrzędnych wierzchołka paraboli: $p=3$ i $q=-50$

Rozwiązanie zadania do końca lecz z usterkami, które jednak nie przekreślają poprawności rozwiązania (np. błędy rachunkowe) .... 4 pkt

- Zapisanie funkcji kwadratowej w postaci iloczynowej z pominięciem współczynnika a: $f(x)=(x-8)(x+2)$ i konsekwentnie do popełnionego błędu rozwiązanie zadania do końca
- Zapisanie funkcji kwadratowej w postaci kanonicznej z błędem, np. $f(x)=2(x-3)-50$, $f(x)=2(x+3)^2+50$, $f(x)=2(x-3)^2+50$, $f(x)=2(x+3)^2-50$
- Rozwiązanie równania $|x-3|=5$ z błędem rachunkowym i konsekwentne do popełnionego błędu rozwiązanie zadania do końca

Rozwiązanie pełne .... 5 pkt

- Zapisanie funkcji kwadratowej f w postaci kanonicznej: $f(x)=2(x-3)^2-50$.

Zadanie 28 *(5 pkt)*

Szkoła zamówiła seans filmowy dla uczniów klas trzecich. Koszt seansu wyniósł 1650zł. Ponieważ do kina nie przyszło 15 uczniów, pozostali musieli dopłacić po 1 zł za bilet. Jaka była planowana, a jaka rzeczywista cena biletów?

<u>Rozwiązanie:</u>

Oznaczamy: x - liczba uczniów, $x\in N$

y - planowana cena biletu, $y>0$

Zapisujemy i rozwiązujemy układ równań:

$$\begin{cases} xy=1650 \\ (x-15)(y+1)=1650 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y=\dfrac{1650}{x} \\ xy+x-15y=1665 \end{cases}$$

Po uproszczeniu otrzymujemy równanie $x^2-15x-24750=0$, którego rozwiązaniami są $x=165$ lub $x=-150$, odrzucamy ujemne rozwiązanie.

Wyznaczamy rozwiązanie układu równań

$$\begin{cases} x = 165 \\ y = 10 \end{cases}$$

Odpowiedź: Planowana cena biletu to 10zł, a rzeczywista cena wyniosła 11zł.

Schemat oceniania:

Rozwiązanie, w którym postęp jest wprawdzie niewielki, ale konieczny na drodze do całkowitego rozwiązania zadania .... 1 pkt

- Zapisanie zależności między ceną biletu oraz liczbą uczniów, np.: $xy = 1650$ lub $(x-15)(y+1) = 1650$, gdzie x - liczba uczniów, y -planowana cena biletu

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... 2 pkt

Zapisanie układu równań z niewiadomymi x i y, np.: $\begin{cases} xy = 1650 \\ (x-15)(y+1) = 1650 \end{cases}$

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 3 pkt

Zapisanie równania z jedną niewiadomą x lub y, np.: $x^2 - 15x - 24750 = 0$

Uwaga

Zdający nie musi zapisywać układu równań, może bezpośrednio zapisać równanie z jedną niewiadomą.

Rozwiązanie zadania do końca lecz z usterkami, które jednak nie przekreślają poprawności rozwiązania (np. błędy rachunkowe) .... 4 pkt

- Rozwiązanie równania kwadratowego z niewiadomą x bezbłędnie i nieobliczenie planowanej ceny biletu lub rzeczywistej ceny biletu

albo

- Rozwiązanie równania kwadratowego z niewiadomą x z błędem rachunkowym i konsekwentne obliczenie ceny biletu

albo

- Rozwiązanie zadania do końca z błędem rachunkowym popełnionym w którejkolwiek fazie rozwiązania (rozwiązanie jest przeprowadzone konsekwentnie w stosunku do popełnionego błędu, a sam błąd nie spowodował istotnej zmiany w sposobie rozwiązania zadania, np.: nie spowodował, że zamiast równania kwadratowego otrzymujemy równanie liniowe).

Rozwiązanie pełne .... 5 pkt

- Podanie prawidłowej odpowiedzi: Planowana cena biletu to 10zł, a rzeczywista cena wyniosła 11zł

Uwaga

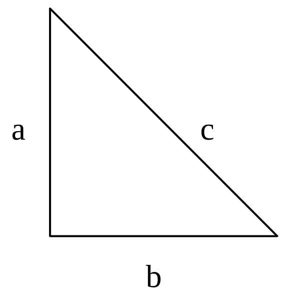
Jeśli zdający nie opisze wprowadzonych oznaczeń, a z przedstawionego rozwiązania nie można jednoznacznie zinterpretować wprowadzonych niewiadomych (np. zapisy są wzajemnie sprzeczne), to oceniamy rozwiązania na 0 punktów.

Zadanie 29 *(6 pkt)*

Długości boków trójkąta prostokątnego tworzą ciąg arytmetyczny, w którym środkowy wyraz wynosi 8. Wyznacz długości boków trójkąta, oblicz jego pole oraz długość promienia okręgu opisanego na tym trójkącie.

I sposób rozwiązania

Wykonujemy rysunek pomocniczy i wprowadzamy na nim odpowiednie oznaczenia.



Ciąg (a, b, c) – jest ciągiem arytmetycznym.

Z treści zadania i własności ciągu arytmetycznego wynika, że $b=\frac{a+c}{2}$ i b=8, zatem $8=\frac{a+c}{2}$.

Przekształcając otrzymujemy $a=16-c$.

Na podstawie twierdzenia Pitagorasa zapisujemy równanie $a^2+b^2=c^2$. Po podstawieniu i przekształceniach otrzymujemy równanie liniowe $32c=320$, którego rozwiązaniem jest $c=10$.

Obliczamy długość przyprostokątnej $a=16-10=6$.

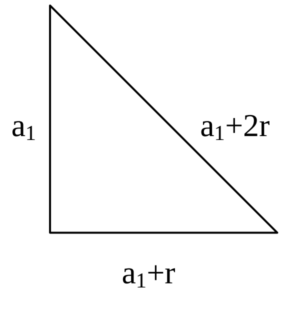
Obliczamy pole trójkąta $P=\frac{1}{2}ab=\frac{1}{2}\cdot 6\cdot 8=24$

Obliczamy promień okręgu opisanego na tym trójkącie $R=\frac{1}{2}c=\frac{10}{2}=5$.

Odpowiedź: Długości boków trójkąta są równe 6, 8, 10. Pole trójkąta jest równe 24, a promień okręgu opisanego na tym trójkącie jest równy 5.

II sposób rozwiązania

Wykonujemy rysunek pomocniczy i oznaczamy jego boki a_1, a_1+r, a_1+2r.



Zapisujemy równania (lub układ równań): $a_1^2+(a_1+r)^2=(a_1+2r)^2$ i $a_1+r=8$.

Obliczamy r = 2. Wyznaczamy długości boków trójkąta $a_1 = 6,\quad a_1 + r = 8,\ a_1 + 2r = 10$.

Obliczamy pole trójkąta $P = \frac{1}{2} a_1 \cdot (a_1 + r) = 24$.

Obliczamy długość promienia okręgu opisanego na tym trójkącie $R = \frac{1}{2}(a_1 + 2r) = \frac{10}{2} = 5$.

Schemat oceniania:

Rozwiązanie, w którym postęp jest wprawdzie niewielki, ale konieczny na drodze do całkowitego rozwiązania zadania .... 1 pkt

- Wykorzystanie wzoru na n-ty wyraz ciągu arytmetycznego do zapisania długości boków trójkąta prostokątnego: $a_1,\ \ a_1 + r,\ \ a_1 + 2r$ i zapisanie warunku $a_1 + r = 8$
- Wykorzystanie własności ciągu arytmetycznego $b = \frac{a+c}{2}$ i zapisanie $b = 8$

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... 2 pkt

- Zapisanie układu równań $a_1^2 + (a_1 + r)^2 = (a_1 + 2r)^2$ i $a_1 + r = 8$
- Zapisanie układu równań $a^2 + 8^2 = c^2$ i $8 = \frac{a+c}{2}$

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 4 pkt

- Doprowadzenie do postaci równania z jedną niewiadomą $32r = 64$ lub $32c - 320 = 0$ i obliczenie długości boków trójkąta $a = 6$ lub $c = 10$.

Uwagi

Jeśli zdający obliczy długość tylko jednego z boków trójkąta, to otrzyma 3 pkt.

Rozwiązanie zadania do końca lecz z usterkami, które jednak nie przekreślają poprawności rozwiązania (np. błędy rachunkowe) .... 5 pkt

- Obliczenie jednej z dwóch wartości $P = 24$ albo $R = 5$.

Uwagi

Jeżeli zdający popełni błąd rachunkowy nie przekreślający poprawności rozwiązania i konsekwentnie z tym błędem rozwiąże zadanie do końca, to otrzymuje 5 pkt.

Rozwiązanie pełne .... 6 pkt

- Długości boków trójkąta wynoszą 6, 8, 10; $P = 24$ i $R = 5$.

Uwagi

- Jeżeli zdający błędnie zapisze twierdzenie Pitagorasa, to otrzymuje 0 pkt.
- Jeżeli zdający przyjmie bok długości 8 jako pierwszy lub trzeci wyraz ciągu, to otrzyma 0 pkt.
- Jeżeli zdający otrzyma ujemne długości boków, to otrzymuje 0 pkt.