



Centralna Komisja Egzaminacyjna

EGZAMIN MATURALNY 2012

MATEMATYKA

POZIOM PODSTAWOWY

Kryteria oceniania odpowiedzi

CZERWIEC 2012

Zadanie 1. (0–1)

| Obszar standardów | Opis wymagań | Poprawna odpowiedź (1 p.) |
|--|--|---------------------------|
| Wykorzystanie i interpretowanie informacji | Usuwanie niewymierności z mianownika (I.1.a) | D |

Zadanie 2. (0–1)

| | | |
|--|---|----------|
| Wykorzystanie i interpretowanie informacji | Wykorzystanie pojęcia wartości bezwzględnej do sprawdzenia czy dane liczby są rozwiązaniami równania typu $ x - a = b$ (I.1.f) | A |
|--|---|----------|

Zadanie 3. (0–1)

| | | |
|--|---|----------|
| Wykorzystanie i interpretowanie informacji | Odczytanie z postaci iloczynowej równania wielomianowego jego rozwiązań (I.3.d) | A |
|--|---|----------|

Zadanie 4. (0–1)

| | | |
|--------------------------|---|----------|
| Modelowanie matematyczne | Wykonanie obliczeń procentowych (III.1.d) | C |
|--------------------------|---|----------|

Zadanie 5. (0–1)

| | | |
|---|---|----------|
| Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji | Wskazanie wykresu funkcji kwadratowej danej wzorem (II.4.a) | A |
|---|---|----------|

Zadanie 6. (0–1)

| | | |
|---|--|----------|
| Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji | Wyznaczenie współrzędnych wierzchołka paraboli będącej wykresem funkcji kwadratowej (II.4.b) | D |
|---|--|----------|

Zadanie 7. (0–1)

| | | |
|--------------------------|---|----------|
| Modelowanie matematyczne | Znalezienie związków miarowych w figurach płaskich. Zastosowanie rachunku kątów w trójkącie (III.7.c) | C |
|--------------------------|---|----------|

Zadanie 8. (0–1)

| | | |
|---|--|----------|
| Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji | Znalezienie związków miarowych w figurach płaskich. Zastosowanie funkcji trygonometrycznych (II.7.c) | C |
|---|--|----------|

Zadanie 9. (0–1)

| | | |
|---|--|----------|
| Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji | Znalezienie związków miarowych w figurach płaskich. Zastosowanie twierdzenia Pitagorasa (II.7.c) | C |
|---|--|----------|

Zadanie 10. (0–1)

| | | |
|---|---|----------|
| Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji | Wykorzystanie związków między kątem wpisanym i środkowym (II.7.a) | D |
|---|---|----------|

Zadanie 11. (0–1)

| | | |
|--|--|----------|
| Wykorzystanie i interpretowanie informacji | Wskazanie trójkąta przystający do danego (I.7.c) | B |
|--|--|----------|

Zadanie 12. (0–1)

| | | |
|---|---|----------|
| Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji | Wskazanie równania okręgu o podanym środku i promieniu (II.8.g) | A |
|---|---|----------|

Zadanie 13. (0–1)

| | | |
|---|--|----------|
| Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji | Obliczenie różnicy wyrażeń wymiernych (II.2.f) | A |
|---|--|----------|

Zadanie 14. (0–1)

| | | |
|--|---|----------|
| Wykorzystanie i interpretowanie informacji | Obliczenie wyrazu ciągu liczbowego określonego wzorem ogólnym (I.5.a) | A |
|--|---|----------|

Zadanie 15. (0–1)

| | | |
|---|--|----------|
| Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji | Obliczenie wyrazu ciągu geometrycznego z wykorzystaniem własności ciągu (II.5.c) | B |
|---|--|----------|

Zadanie 16. (0–1)

| | | |
|--|--|----------|
| Wykorzystanie i interpretowanie informacji | Wyznaczenie miary kąta ostrego (I.6.b) | C |
|--|--|----------|

Zadanie 17. (0–1)

| | | |
|------------------------------|--|----------|
| Użycie i tworzenie strategii | Określenie wzoru funkcji o podanej dziedzinie (IV.4.a) | D |
|------------------------------|--|----------|

Zadanie 18. (0–1)

| | | |
|---|--|----------|
| Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji | Zinterpretowanie znaków współczynników a i b we wzorze funkcji liniowej (II.4.g) | C |
|---|--|----------|

Zadanie 19. (0–1)

| | | |
|---|---|----------|
| Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji | Wykorzystanie współrzędnych środka odcinka (II.8.f) | A |
|---|---|----------|

Zadanie 20. (0–1)

| | | |
|---|---|----------|
| Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji | Wyznaczenie mediany zbioru danych (II.10.a) | C |
|---|---|----------|

Zadanie 21. (0–1)

| | | |
|---|--|----------|
| Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji | Wykorzystanie wzoru skróconego mnożenia (II.2.a) | C |
|---|--|----------|

Zadanie 22. (0–1)

| | | |
|--------------------------|---------------------------------------|----------|
| Modelowanie matematyczne | Obliczenie objętości stożka (III.9.b) | C |
|--------------------------|---------------------------------------|----------|

Zadanie 23. (0–1)

| | | |
|------------------------------|---|----------|
| Użycie i tworzenie strategii | Obliczenie prawdopodobieństwa zdarzenia z zastosowaniem klasycznej definicji prawdopodobieństwa (IV.10.b) | D |
|------------------------------|---|----------|

Zadanie 24. (0–1)

| | | |
|--------------------------|--|----------|
| Modelowanie matematyczne | Wyznaczenie związków miarowych w walcu (III.9.b) | B |
|--------------------------|--|----------|

Zadanie 25. (0–2)

| | |
|---|--|
| Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji | Rozwiązanie nierówności kwadratowej (II.3.a) |
|---|--|

Zdający otrzymuje 1 pkt
gdy:

- prawidłowo obliczy pierwiastki trójmianu kwadratowego $x_1 = -2, x_2 = 5$ i na tym porzestanie lub dalej popełni błędy,

albo

- rozłoży trójmian kwadratowy $x^2 - 3x - 10$ na czynniki liniowe i zapisze nierówność $(x + 2)(x - 5) < 0$ i na tym porzestanie lub dalej popełni błędy,

albo

- popełni błąd rachunkowy przy obliczaniu pierwiastków trójmianu kwadratowego i konsekwentnie do popełnionego błędu rozwiąże nierówność, np., $x_1 = 2, x_2 = -5$, stąd $x \in (-5, 2)$,

albo

- doprowadzi nierówność do postaci $\left|x - \frac{3}{2}\right| < \frac{7}{2}$ (na przykład z postaci

$$\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{49}{4} < 0 \text{ otrzymuje } \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 < \frac{49}{4}, \text{ a następnie } \left|x - \frac{3}{2}\right| < \frac{7}{2}$$

i na tym porzestanie lub dalej popełni błędy.

Zdający otrzymuje 2 pkt
gdy:

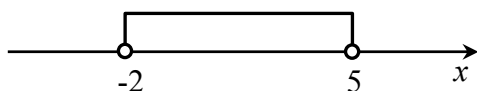
- poda zbiór rozwiązań nierówności w postaci: $-2 < x < 5$ lub $(-2, 5)$ lub $x \in (-2, 5)$

albo

- sporządzi ilustrację geometryczną (oś liczbowa, wykres) i zapisze zbiór rozwiązań nierówności w postaci: $x > -2, x < 5$

albo

- poda zbiór rozwiązań nierówności w postaci graficznej z poprawnie zaznaczonymi końcami przedziałów:



Kryteria oceniania uwzględniające specyficzne trudności w uczeniu się matematyki

1. Jeśli zdający poprawnie obliczy pierwiastki trójmianu $x = -2, x = 5$ i zapisze np.: $x \in (2, 5)$, popełniając tym samym błąd przy przepisywaniu jednego z pierwiastków, to za takie rozwiązanie otrzymuje **2 punkty**.

Zadania 26. (0–2)

| | |
|--------------------------|--|
| Modelowanie matematyczne | Zastosowanie definicję średniej arytmetycznej do wyznaczenia liczby elementów zbioru danych (III.10.a) |
|--------------------------|--|

I sposób rozwiązania

Niech x oznacza liczbę studentów w danej grupie. Wtedy łączna liczba lat studentów w danej grupie wynosi $23x$, zaś łączna liczba lat studentów i opiekuna to $23x + 39$. Zatem średnia wieku studentów wraz z opiekunem jest równa: $\frac{23x + 39}{x + 1}$.

Otrzymujemy równanie $\frac{23x + 39}{x + 1} = 24$ stąd $23x + 39 = 24(x + 1)$, a więc $x = 15$.

Odpowiedź: W tej grupie jest 15 studentów.

Schemat oceniania I sposobu rozwiązania

Zdający otrzymuje 1 pkt

gdy zapisze nową średnią wieku studentów wraz z opiekunem: $\frac{23x + 39}{x + 1}$ i na tym poprzestanie lub dalej popełni błędy.

Zdający otrzymuje 2 pkt

gdy obliczy liczbę studentów w grupie: 15 osób.

II sposób rozwiązania

Zapisujemy zależności pomiędzy liczbą studentów danej grupy, a łączną liczbą lat wszystkich studentów. Niech x oznacza liczbę studentów w grupie, zaś S łączną liczbę lat studentów.

Zapisujemy układ równań:
$$\begin{cases} \frac{S}{x} = 23 \\ \frac{S + 39}{x + 1} = 24 \end{cases}$$

Rozwiązujemy układ równań
$$\begin{cases} S = 23x \\ \frac{23x + 39}{x + 1} = 24 \\ 23x + 39 = 24(x + 1) \\ x = 15 \end{cases}$$

Odpowiedź: W tej grupie jest 15 studentów.

Schemat oceniania II sposobu rozwiązania

Zdający otrzymuje 1 pkt

gdy zapisze układ równań opisujący średnie wieku, np.
$$\begin{cases} \frac{S}{x} = 23 \\ \frac{S + 39}{x + 1} = 24 \end{cases}$$

gdzie x jest liczbą studentów w danej grupie, zaś S jest łączną liczbą lat studentów, i na tym poprzestanie lub dalej popełni błędy.

Zdający otrzymuje 2 pkt

gdy obliczy liczbę studentów w danej grupie: 15 studentów.

III sposób rozwiązania

Różnicę wieku opiekuna i średniej wieku studentów rozdzielamy między x studentów i jednego opiekuna.

- Obliczamy różnicę wieku opiekuna i średniej wieku studentów $39 - 23 = 16$.
- Ponieważ średnia wieku wzrosła o 1 rok, więc te 16 lat rozdzielamy pomiędzy studentów i opiekuna, każdemu dodając 1 rok.
- Zatem $16 = x \cdot 1 + 1$, stąd $x = 15$.
- Zapisujemy odpowiedź: W tej grupie jest 15 studentów.

Schemat oceniania III sposobu rozwiązania

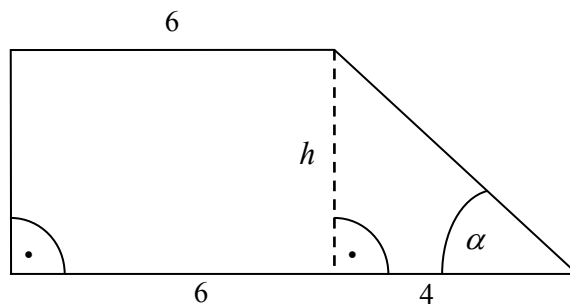
Zdający otrzymuje 1 pkt
gdy obliczy różnicę lat opiekuna i średniej wieku studentów $39 - 23 = 16$ i słownie zapisze sposób rozumowania, np.: *Ponieważ średnia lat wzrosła do 24 lat, więc każdemu studentowi z tych 16 lat dodajemy 1 rok oraz 1 rok dla opiekuna* i na tym poprzestanie lub dalej popełni błędy.

Zdający otrzymuje 2 pkt
gdy obliczy liczbę studentów w danej grupie: 15 studentów.

Zadanie 27. (0–2)

| | |
|------------------------------|---|
| Użycie i tworzenie strategii | Obliczenie pole trapezu prostokątnego. Zastosowanie funkcji trygonometrycznych (IV.7.c) |
|------------------------------|---|

Rozwiązanie



Obliczamy wysokość trapezu h , korzystając z faktu, że tangens kąta ostrego jest równy 3:

$$\frac{h}{4} = 3, \text{ stąd } h = 12.$$

Zatem pole trapezu jest równe $\frac{(6+10) \cdot 12}{2} = 96$.

Schemat oceniania

Zdający otrzymuje 1 pkt
gdy:

- obliczy wysokość trapezu $h = 12$ i na tym poprzestanie lub błędnie obliczy pole, albo
- obliczy wysokość trapezu z błędem rachunkowym i konsekwentnie do popełnionego błędu obliczy pole trapezu.

Zdający otrzymuje 2 pkt
gdy poprawnie obliczy pole trapezu $P = 96$.

Zadania 28. (0–2)

| | |
|----------------------------|--|
| Rozumowanie i argumentacja | Uzasadnienie tożsamości trygonometrycznej z zastosowaniem prostych związków między funkcjami trygonometrycznymi kąta ostrego (V.6.c) |
|----------------------------|--|

I sposób rozwiązania

$$\sin^4 \alpha - \sin^2 \alpha = \cos^4 \alpha - \cos^2 \alpha$$

$$\sin^2 \alpha (\sin^2 \alpha - 1) = \cos^2 \alpha (\cos^2 \alpha - 1)$$

$$\sin^2 \alpha (-\cos^2 \alpha) = \cos^2 \alpha (-\sin^2 \alpha)$$

$$L = P$$

Schemat oceniania I sposobu rozwiązania

Zdający otrzymuje 1 pkt

gdy przekształci lewą lub prawą stronę tej równości do postaci:

$\sin^2 \alpha (\sin^2 \alpha - 1)$ lub $\cos^2 \alpha (\cos^2 \alpha - 1)$ i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy.

Zdający otrzymuje 2 pkt

gdy przeprowadzi pełne rozumowanie i uzasadni, że tożsamość jest prawdziwa.

II sposób rozwiązania

$$\sin^4 \alpha - \cos^4 \alpha = \sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha$$

$$(\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)(\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha) = \sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha$$

$$1 \cdot (\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha) = \sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha$$

$$L = P$$

Schemat oceniania II sposobu rozwiązania

Zdający otrzymuje 1 pkt

gdy uzyska po lewej stronie wyrażenie $(\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)(\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha)$ i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy.

Zdający otrzymuje 2 pkt

gdy przeprowadzi pełne rozumowanie i uzasadni, że tożsamość jest prawdziwa.

III sposób rozwiązania

$$L = \sin^4 \alpha + \cos^2 \alpha = \sin^2 \alpha \cdot \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = \sin^2 \alpha \cdot (1 - \cos^2 \alpha) + \cos^2 \alpha =$$

$$= \sin^2 \alpha - \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 - (1 - \cos^2 \alpha) \cdot \cos^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha + \cos^4 \alpha =$$

$$= \sin^2 \alpha + \cos^4 \alpha = P$$

Schemat oceniania III sposobu rozwiązania

Zdający otrzymuje 1 pkt

gdy przekształcając lewą lub prawą stronę równości uzyska wyrażenie

$\sin^2 \alpha - \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha + \cos^2 \alpha$ i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy.

Zdający otrzymuje 2 pkt

gdy przeprowadzi pełne rozumowanie i uzasadni, że tożsamość jest prawdziwa.

IV sposób rozwiązania

$$\begin{aligned}\sin^2 \alpha \cdot \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha &= \sin^2 \alpha + \cos^4 \alpha \\ (1 - \cos^2 \alpha) \cdot (1 - \cos^2 \alpha) + \cos^2 \alpha &= (1 - \cos^2 \alpha) + \cos^4 \alpha \\ 1 - 2 \cos^2 \alpha + \cos^4 \alpha + \cos^2 \alpha &= 1 - \cos^2 \alpha + \cos^4 \alpha \\ 1 - \cos^2 \alpha + \cos^4 \alpha &= 1 - \cos^2 \alpha + \cos^4 \alpha \\ L &= P\end{aligned}$$

lub

$$\begin{aligned}\sin^4 \alpha + \cos^2 \alpha &= \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha \\ \sin^4 \alpha + (1 - \sin^2 \alpha) &= \sin^2 \alpha + (1 - \sin^2 \alpha) \cdot (1 - \sin^2 \alpha) \\ \sin^4 \alpha - \sin^2 \alpha + 1 &= \sin^2 \alpha + 1 - 2 \sin^2 \alpha + \sin^4 \alpha \\ \sin^4 \alpha - \sin^2 \alpha + 1 &= \sin^4 \alpha - \sin^2 \alpha + 1 \\ L &= P\end{aligned}$$

Schemat oceniania IV sposobu rozwiązania

Zdający otrzymuje 1 pkt

gdy przekształci równość do postaci, w której występuje tylko jedna funkcja

trygonometryczna, np.: $(1 - \cos^2 \alpha) \cdot (1 - \cos^2 \alpha) + \cos^2 \alpha = (1 - \cos^2 \alpha) + \cos^4 \alpha$

lub $\sin^4 \alpha + (1 - \sin^2 \alpha) = \sin^2 \alpha + (1 - \sin^2 \alpha) \cdot (1 - \sin^2 \alpha)$ i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy.

Zdający otrzymuje 2 pkt

jeżeli przeprowadzi pełne rozumowanie i uzasadni, że tożsamość jest prawdziwa.

V sposób rozwiązania

Daną równość zapisujemy w postaci $\sin^4 \alpha - \cos^4 \alpha = \sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha$. Przekształcamy:

$$\begin{aligned}L = \sin^4 \alpha - \cos^4 \alpha &= (\sin^2 \alpha)^2 - \cos^4 \alpha = (1 - \cos^2 \alpha)^2 - \cos^4 \alpha = \\ &= 1 - 2 \cos^2 \alpha + \cos^4 \alpha - \cos^4 \alpha = 1 - 2 \cos^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha - \cos^2 \alpha = \sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha = P\end{aligned}$$

Schemat oceniania V sposobu rozwiązania

Zdający otrzymuje 1 pkt

gdy uzyska po lewej stronie wyrażenie $(1 - \cos^2 \alpha)^2 - \cos^4 \alpha$ i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy.

Zdający otrzymuje 2 pkt

gdy przeprowadzi pełne rozumowanie i uzasadni, że tożsamość jest prawdziwa.

Zadanie 29. (0–2)

| | |
|----------------------------|---|
| Rozumowanie i argumentacja | Przeprowadzenie dowodu algebraicznego (V.1.a) |
|----------------------------|---|

I sposób rozwiązania

Weźmy trzy kolejne liczby całkowite $n-1$, n , $n+1$. Wówczas

$(n-1)^2 + n^2 + (n+1)^2 = n^2 - 2n + 1 + n^2 + n^2 + 2n + 1 = 3n^2 + 2$, więc reszta z dzielenia sumy ich kwadratów przez 3 jest równa 2.

Schemat oceniania I sposobu rozwiązania

Zdający otrzymuje 2 pkt

gdy zapisze sumę kwadratów trzech kolejnych liczb całkowitych w postaci

$$(n-1)^2 + n^2 + (n+1)^2 = 3n^2 + 2$$

II sposób rozwiązania

Weźmy trzy kolejne liczby całkowite n , $n+1$, $n+2$.

Wówczas $n^2 + (n+1)^2 + (n+2)^2 = 3n^2 + 6n + 5 = 3(n^2 + 2n + 1) + 2$, więc reszta z dzielenia sumy ich kwadratów przez 3 jest równa 2.

Schemat oceniania II sposobu rozwiązania

Zdający otrzymuje 1 pkt

gdy zapisze sumę kwadratów trzech kolejnych liczb całkowitych, doprowadzi wyrażenie do postaci $n^2 + (n+1)^2 + (n+2)^2 = 3n^2 + 6n + 5$ i na tym poprzestanie lub dalej popełni błąd.

Zdający otrzymuje 2 pkt

gdy zapisze sumę kwadratów trzech kolejnych liczb całkowitych w postaci

$$n^2 + (n+1)^2 + (n+2)^2 = 3n^2 + 6n + 3 + 2 \quad \text{lub} \quad n^2 + (n+1)^2 + (n+2)^2 = 3(n^2 + 2n + 1) + 2.$$

Uwaga

Mogą się zdarzyć rozwiązania wykorzystujące kongruencje:

wśród trzech kolejnych liczb jest jedna podzielna przez 3 (oznaczymy ją przez a), jedna dająca przy dzieleniu przez 3 resztę 1 (oznaczymy ją przez b) i jedna dająca przy dzieleniu przez 3 resztę 2 (oznaczymy ją przez c).

Mamy zatem $a \equiv 0 \pmod{3}$, $b \equiv 1 \pmod{3}$, $c \equiv 2 \pmod{3}$.

Wówczas $a^2 + b^2 + c^2 \equiv 0^2 + 1^2 + 2^2 = 5 \equiv 2 \pmod{3}$.

Zadanie 30. (0–2)

| | |
|--------------------------|---|
| Modelowanie matematyczne | Zastosowanie wzoru na n -ty wyraz i sumę ciągu arytmetycznego (III.5.c) |
|--------------------------|---|

I sposób rozwiązania

Obliczamy wartości sum częściowych:

$$S_1 = a_1 = 1 - 2 = -1$$

$$S_2 = a_1 + a_2 = 4 - 4 = 0.$$

Zatem $a_2 = 0 - (-1) = 1$ oraz $r = a_2 - a_1 = 1 - (-1) = 2$.

Korzystamy ze wzoru na n -ty wyraz ciągu arytmetycznego i otrzymujemy:

$$a_n = a_1 + (n-1)r = -1 + (n-1) \cdot 2 = 2n - 3$$

Odpowiedź: n -ty wyraz ciągu (a_n) wyraża się wzorem $a_n = 2n - 3$.

Schemat oceniania I sposobu rozwiązania

Zdający otrzymuje 1 pkt

gdy obliczy wartości sum częściowych:

$$S_1 = a_1 = 1 - 2 = -1$$

$$S_2 = a_1 + a_2 = 4 - 4 = 0$$

i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy.

Zdający otrzymuje 2 pkt

gdy bezbłędnie wyznaczy n -ty wyraz ciągu (a_n) : $a_n = 2n - 3$.

Uwagi

1. Zdający może od razu zapisać układ $\begin{cases} a_1 = -1 \\ a_1 + a_2 = 0 \end{cases}$

2. Jeżeli zdający zapisze układ $\begin{cases} a_1 = -1 \\ a_2 = 0 \end{cases}$, to otrzymuje **0 punktów**.

II sposób rozwiązania

Zauważamy, że dla $n > 1$ mamy $a_n = S_n - S_{n-1}$.

$$S_{n-1} = (n-1)^2 - 2(n-1) = n^2 - 4n + 3$$

Obliczamy $a_n = S_n - S_{n-1} = n^2 - 2n - (n^2 - 4n + 3) = 2n - 3$ oraz $a_1 = S_1 = -1$.

Zauważamy ponadto, że wzór $a_n = 2n - 3$ dla $n = 1$ daje otrzymaną wartość $a_1 = -1$.

Zatem dla każdego $n \geq 1$ otrzymujemy $a_n = 2n - 3$.

Schemat oceniania II sposobu rozwiązania

Zdający otrzymuje 1 pkt

gdy zapisze, że $a_n = S_n - S_{n-1}$, wyznaczy $S_{n-1} = (n-1)^2 - 2(n-1) = n^2 - 4n + 3$ i na tym poprzestanie lub dalej popełni błędy.

Zdający otrzymuje 2 pkt

gdy bezbłędnie wyznaczy n -ty wyraz ciągu: $a_n = 2n - 3$.

Uwaga

Przyznajemy **2 punkty** nawet wtedy, gdy zdający nie sprawdzi, czy $a_1 = -1$.

III sposób rozwiązania

Zauważamy, że $\frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = n^2 - 2n$ i wyznaczamy $a_n = 2n - 4 - a_1$.

Obliczamy $a_1 = S_1 = -1$. Stąd otrzymujemy $a_n = 2n - 4 + 1$, czyli $a_n = 2n - 3$.

Schemat oceniania III sposobu rozwiązania

Zdający otrzymuje 1 pkt

gdy ze wzoru $\frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = n^2 - 2n$ wyznaczy $a_n = 2n - 4 - a_1$ i na tym poprzestanie

lub dalej popełni błędy.

Zdający otrzymuje 2 pkt

gdy wyznaczy n -ty wyraz ciągu: $a_n = 2n - 3$.

Uwagi

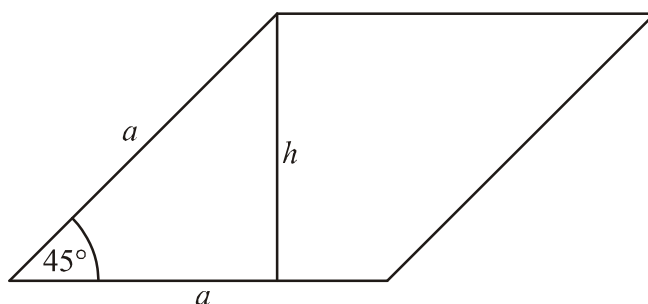
1. Zdający może od razu zapisać, że $a_n = 2n - 4 - a_1$.

2. Jeśli zdający zapisze, że $\frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = n^2 - 2n$, wyznaczy z błędem rachunkowym a_n np.:

$a_n = 2n - 2 - a_1$ i z tym błędem doprowadzi rozwiązanie do końca, to otrzymuje **1 punkt**.

Zadanie 31. (0–2)

| | |
|------------------------------|---|
| Użycie i tworzenie strategii | Wykorzystanie związków miarowych w figurach płaskich (IV.7.c) |
|------------------------------|---|

I sposób rozwiązania

Z warunków zadania otrzymujemy układ równań:

$$\begin{cases} a \cdot h = 50\sqrt{2} \\ \frac{h}{a} = \sin 45^\circ \end{cases}$$

Zatem $h = a \cdot \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} a$ oraz $a \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} a = 50\sqrt{2}$.

Wobec tego $a^2 = 100$, $a = 10$, $h = 10 \frac{\sqrt{2}}{2} = 5\sqrt{2}$.

Odpowiedź: Wysokość rombu jest równa $5\sqrt{2}$.

Schemat oceniania I sposobu rozwiązania

Zdający otrzymuje 1 pkt
gdy zapisze dwa związki między liczbami a i h i na tym poprzestanie lub dalej popełni błąd.

Zdający otrzymuje 2 pkt
gdy poprawnie obliczy wysokość rombu $h = 5\sqrt{2}$.

II sposób rozwiązania

Ze wzoru na pole równoległoboku, gdy dane są jego dwa sąsiednie boki oraz kąt między nimi zawarty, mamy $a^2 \cdot \sin 45^\circ = 50\sqrt{2}$. Zatem $a^2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 50\sqrt{2}$, $a^2 = 100$, $a = 10$.

Z innego wzoru na pole równoległoboku mamy $a \cdot h = 50\sqrt{2}$.

Wobec tego $10 \cdot h = 50\sqrt{2}$ oraz $h = 5\sqrt{2}$.

Schemat oceniania II sposobu rozwiązania

Zdający otrzymuje 1 pkt
gdy poprawnie obliczy długość a boku rombu i na tym poprzestanie lub dalej popełni błąd.

Zdający otrzymuje 2 pkt
gdy poprawnie obliczy wysokość rombu $h = 5\sqrt{2}$.

Zadanie 32. (0–4)

| | |
|------------------------------|---|
| Użycie i tworzenie strategii | Wyznaczenie punktu przecięcia się prostych prostopadłych (IV.8.b, 8.c, 8.d) |
|------------------------------|---|

I sposób rozwiązania

Wyznaczamy równanie prostej AB : $y = 2x + 7$.

Wyznaczamy równanie prostej CD prostopadłej do prostej AB i przechodzącej przez punkt C :

$$y = -\frac{1}{2}x + 17.$$

Zapisujemy układ równań:
$$\begin{cases} y = 2x + 7 \\ y = -\frac{1}{2}x + 17 \end{cases}$$

Rozwiązujemy układ równań i zapisujemy współrzędne punktu D : $D = (4, 15)$.

Schemat oceniania I sposobu rozwiązania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania 1 pkt

- Wyznaczenie równania prostej AB : $y = 2x + 7$
- albo
- obliczenie współczynnika kierunkowego prostej AB : $a = 2$.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp.....2 pktWyznaczenie równania prostej CD prostopadłej do prostej AB i przechodzącej przez punkt C

$$y = -\frac{1}{2}x + 17.$$

Pokonanie zasadniczych trudności zadania.....3 pkt

Zapisanie układu równań:
$$\begin{cases} y = 2x + 7 \\ y = -\frac{1}{2}x + 17 \end{cases}$$

Rozwiązanie pełne4 pktRozwiązanie układu równań i zapisanie współrzędnych punktu D : $D = (4, 15)$.**Uwagi**

1. Jeśli zdający źle wyznaczy równanie prostej AB i konsekwentnie do popełnionego błędu rozwiąże zadanie do końca, to otrzymuje **3 punkty** (współczynnik kierunkowy prostej AB powinien być jednak liczbą dodatnią).
2. Jeśli zdający odczyta współrzędne punktu D na podstawie dokładnie sporządzonego rysunku to otrzymuje **4 punkty**.
3. Jeśli zdający poda współrzędne punktu D bez dokładnego rysunku lub uzasadnienia to otrzymuje **0 punktów**.

II sposób rozwiązaniaObliczamy pole trójkąta ABC : $P_{ABC} = 15$. Obliczamy długość podstawy AB trójkąta ABC :

$$|AB| = 6\sqrt{5}. \text{ Ze związku } P_{ABC} = \frac{1}{2}|CD| \cdot |AB| \text{ obliczamy wysokość } CD \text{ trójkąta } ABC:$$

$$|CD| = \sqrt{5}. \text{ Wyznaczamy równanie prostej } AB: y = 2x + 7. \text{ Zapisujemy współrzędne punktu}$$

 D w zależności od zmiennej x : $D = (x, 2x + 7)$. Wyrażamy związek $|CD| = \sqrt{5}$ za pomocą

$$\text{równania } \sqrt{(x-6)^2 + (2x+7-14)^2} = \sqrt{5}, \text{ gdzie } x \text{ oznacza pierwszą współrzędną punktu } D.$$

Rozwiązujemy równanie i otrzymujemy $x = 4$. Zapisujemy zatem współrzędne punktu D :

$$D = (4, 15).$$

Schemat oceniania II sposobu rozwiązania**Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania1 pkt**Obliczenie pola trójkąta ABC : $P_{ABC} = 15$.**Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp.....2 pkt**Obliczenie wysokości CD trójkąta ABC : $|CD| = \sqrt{5}$.**Pokonanie zasadniczych trudności zadania.....3 pkt**Zapisanie współrzędnych punktu D w zależności od jednej zmiennej: $D = (x, 2x + 7)$

$$\text{i zapisanie równania } \sqrt{(x-6)^2 + (2x+7-14)^2} = \sqrt{5}.$$

Rozwiązanie pełne4 pktRozwiązanie równania i zapisanie współrzędnych punktu D : $D = (4, 15)$.**Uwaga**Jeżeli zdający popełni błąd rachunkowy przy obliczaniu pola trójkąta ABC i konsekwentnie do popełnionego błędu rozwiąże zadanie do końca, to otrzymuje **3 punkty**.

Zadanie 33. (0–4)

| | |
|------------------------------|--|
| Użycie i tworzenie strategii | Zliczenie obiektów w prostej sytuacji kombinatorycznej (IV.10.b) |
|------------------------------|--|

I sposób rozwiązania

Zauważamy, że dla poprawnego rozwiązania zadania istotne są **trzy grupy cyfr**: cyfra 7, cyfry parzyste bez zera oraz cyfry nieparzyste różne od 7.

- Miejsce dla cyfry 7 możemy wybrać na 5 sposobów.
- Miejsce dla cyfry parzystej możemy wybrać na 4 sposoby.
- Cyfrę parzystą do wpisania na wybranym miejscu możemy wybrać spośród 4 cyfr parzystych, czyli na 4 sposoby.
- Na pozostałych trzech miejscach możemy wpisać cyfry nieparzyste różne od 7.

Możemy to zrobić na $4^3 = 64$ sposoby.

Zatem wszystkich liczb pięciocyfrowych spełniających warunki zadania jest:

$$5 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4^3 = 5 \cdot 4^5 = 5 \cdot 1024 = 5120.$$

Schemat oceniania I sposobu rozwiązania

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp 2 pkt

Obliczenie, na ile sposobów można ustawić cyfry z **dwóch grup cyfr** (spośród trzech rozważanych).

Pokonanie zasadniczych trudności zadania 3 pkt

Obliczenie, na ile sposobów można ustawić cyfry z **trzech grup cyfr**:

- Miejsce dla cyfry 7 – na 5 sposobów.
- Miejsce dla cyfry parzystej – na 4 sposoby.
- Cyfrę parzystą do wpisania na wybranym miejscu – na 4 sposoby.
- Cyfry nieparzyste różne od 7 na pozostałych trzech miejscach – na $4^3 = 64$ sposoby.

Rozwiązanie pełne 4 pkt

Obliczenie, ile liczb pięciocyfrowych spełnia warunki zadania: $5 \cdot 4^5 = 5120$.

II sposób rozwiązania

Rozpatrujemy następujące trzy warianty ustawień cyfr:

- 1) na pierwszym miejscu cyfra 7, na jednym z czterech miejsc cyfra parzysta, a na każdym z pozostałych trzech miejsc cyfra nieparzysta różna od 7.

Każdą z czterech cyfr parzystych możemy umieścić **na jednym z czterech miejsc** na $4 \cdot 4$ sposobów, zaś każdą z czterech pozostałych cyfr nieparzystych (bez cyfry 7) możemy rozmieścić **na trzech miejscach** na $4 \cdot 4 \cdot 4 = 4^3$ sposobów. Zatem liczba możliwych ustawień cyfr w tym wariantcie równa się: $4 \cdot 4 \cdot 4^3 = 4^5 = 1024$.

- 2) na pierwszym miejscu cyfra parzysta różna od 0, na jednym z czterech pozostałych miejsc cyfra 7, zaś na każdym z pozostałych trzech miejsc cyfra nieparzysta różna od 7.

Na pierwszym miejscu możemy ustawić **każdą z czterech cyfr parzystych różnych od zera**, zaś na **każdym z pozostałych czterech miejsc** możemy umieścić cyfrę 7, stąd otrzymujemy $4 \cdot 4$ możliwości ustawień cyfry parzystej oraz cyfry 7. Natomiast każdą z czterech pozostałych cyfr nieparzystych różnych od 7 możemy rozmieścić **na pozostałych trzech miejscach** na $4 \cdot 4 \cdot 4 = 4^3$ sposobów. Zatem liczba możliwych ustawień cyfr w tym wariantcie jest równa:

$$4 \cdot 4 \cdot 4^3 = 4^5 = 1024.$$

- 3) na pierwszym miejscu cyfra nieparzysta różna od 7, na jednym z pozostałych czterech miejsc cyfra parzysta, na jednym z trzech pozostałych miejsc cyfra 7, a na pozostałych dwóch miejscach cyfra nieparzysta różna od 7.

Każdą z czterech cyfr nieparzystych (różną od 7) możemy umieścić na pierwszym miejscu (4 sposoby). Na każdym z czterech pozostałych miejsc możemy umieścić każdą z czterech cyfr parzystych na $4 \cdot 4$ sposobów. Cyfrę 7 możemy umieścić na każdym z trzech pozostałych miejsc, zaś każdą z czterech pozostałych cyfr nieparzystych różnych od 7 umieścimy na dwóch miejscach na $3 \cdot 4 \cdot 4 = 3 \cdot 4^2$ sposobów. Zatem, w tym wariacie, liczba możliwych ustawień jest równa: $4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 4^2 = 3 \cdot 4^5 = 3072$.

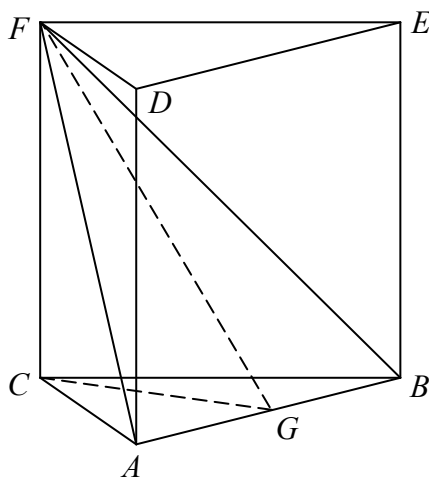
Liczba wszystkich możliwych ustawień jest sumą liczb ustawień w poszczególnych wariantach i równa się: $1024 + 1024 + 3072 = 5120$.

Schemat oceniania II sposobu rozwiązania

Przyznajemy po **1 punkcie** za obliczenie liczby możliwych ustawień cyfr w każdym z trzech wariantów i **1 punkt** za obliczenie sumy tych możliwości.

Zadanie 34. (0–4)

| | |
|------------------------------|---|
| Użycie i tworzenie strategii | Obliczenie objętości graniastosłupa z zastosowaniem związków miarowych w wielościanach (IV.9.b) |
|------------------------------|---|



I sposób rozwiązania

Niech G będzie środkiem krawędzi AB . Rysujemy wysokość FG trójkąta ABF .

Pole trójkąta ABF jest równe: $P_{ABF} = \frac{|AB| \cdot |FG|}{2} = \frac{8 \cdot |FG|}{2} = 4 \cdot |FG| = 52$. Stąd $|FG| = 13$.

W trójkącie równobocznym ABC mamy $|CG| = 4\sqrt{3}$. Korzystamy z twierdzenia Pitagorasa w trójkącie FCG do obliczenia $|CF|$: $|CF|^2 + |CG|^2 = |FG|^2$, stąd $|CF| = 11$.

Obliczamy objętość graniastosłupa: $V = \frac{|AB|^2 \sqrt{3}}{4} \cdot |CF| = \frac{64 \cdot \sqrt{3}}{4} \cdot 11 = 176\sqrt{3}$.

Schemat oceniania I sposobu rozwiązania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania 1 pkt

- Narysowanie wysokości CG trójkąta ABC i obliczenie długości odcinka CG – wysokości trójkąta równobocznego ABC , podstawy graniastoslupa prawidłowego: $|CG| = 4\sqrt{3}$

albo

- obliczenie wysokości trójkąta ABF : $|FG| = 13$.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp 2 pkt

- Narysowanie wysokości CG trójkąta ABC i obliczenie długości odcinka CG – wysokości trójkąta równobocznego ABC , podstawy graniastoslupa prawidłowego: $|CG| = 4\sqrt{3}$

oraz

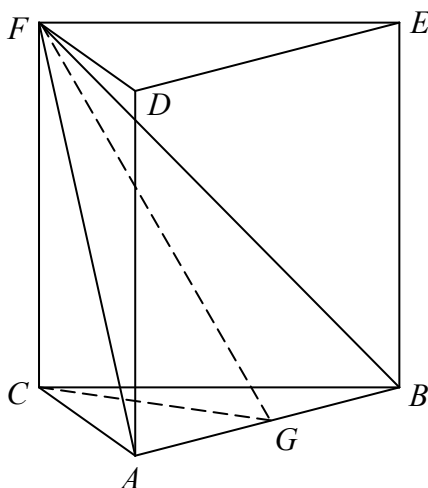
- obliczenie wysokości trójkąta ABF : $|FG| = 13$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania 3 pkt

Obliczenie wysokości CF graniastoslupa prawidłowego trójkątnego $ABCDEF$: $|CF| = 11$.

Rozwiązanie pełne 4 pkt

Obliczenie objętości graniastoslupa: $V = 176\sqrt{3}$.



II sposób rozwiązania

Niech G będzie środkiem krawędzi AB . Rysujemy wysokość FG trójkąta ABF .

Pole trójkąta ABF : $P_{ABF} = \frac{|AB| \cdot |FG|}{2} = 52$, stąd $|FG| = 13$.

Korzystamy z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta AFG i obliczamy kwadrat długości odcinka AF : $|AF|^2 = 13^2 + 4^2 = 185$.

Następnie korzystamy z twierdzenia Pitagorasa w trójkącie ACF , aby obliczyć wysokość graniastoslupa CF : $|CF|^2 + |AC|^2 = |AF|^2$, czyli $|CF|^2 = 185 - 64 = 121$. Zatem $|CF| = 11$.

Obliczamy objętość graniastoslupa: $V = \frac{|AB|^2 \sqrt{3}}{4} \cdot |CF| = \frac{64 \cdot \sqrt{3}}{4} \cdot 11 = 176\sqrt{3}$.

Schemat oceniania II sposobu rozwiązania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania 1 pkt

Obliczenie wysokości FG trójkąta ABF : $|FG| = 13$.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp 2 pkt

Obliczenie długości przekątnej ściany bocznej lub kwadrat jej długości: $|AF|^2 = 185$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania 3 pkt

Obliczenie wysokości CF graniastosłupa: $|CF| = 11$.

Rozwiązanie pełne 4 pkt

Obliczenie objętości graniastosłupa: $V = 176\sqrt{3}$.