



Materiały diagnostyczne z matematyki poziom podstawowy

czerwiec 2012

Klucz odpowiedzi do zadań zamkniętych oraz schemat oceniania

Materiały diagnostyczne przygotowała **Agata Siwik** we współpracy z nauczycielami matematyki szkół ponadgimnazjalnych:

Ewa Ziętek

Nauczyciel II Liceum Ogólnokształcącego im. Konstantego Ildefonsa Gałczyńskiego w Olsztynie
Nauczyciel Technikum nr 6 w Zespole Szkół Elektronicznych i Telekomunikacyjnych w Olsztynie

Irena Jakóbowska

Nauczyciel VI Liceum Ogólnokształcącego im. G. Narutowicza w Olsztynie
Wicedyrektor VI Liceum Ogólnokształcącego im. G. Narutowicza w Olsztynie

Elżbieta Guziejko

Nauczyciel Liceum Ogólnokształcącego im. Jana Kochanowskiego w Olecku

Ewa Olszewska

Nauczyciel Technikum w Zespole Szkół Handlowo-Ekonomicznych im. M. Kopernika w Białymstoku

Andrzej Gołota

Nauczyciel Technikum w Zespole Szkół Mechanicznych w Elblągu
Konsultant ds. matematyki Warmińsko-Mazurskiego Ośrodka Doskonalenia Nauczycieli w Elblągu

Jan Żukowski

Nauczyciel I Liceum Ogólnokształcącego im. M. Konopnickiej w Suwałkach
Doradca metodyczny Centrum Doskonalenia Nauczycieli i Kształcenia Ustawicznego w Suwałkach

Wszystkie arkusze maturalne znajdziesz na stronie: arkuszematuralne.pl

Odpowiedzi do zadań zamkniętych

Nr zadania	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
odpowiedź	C	D	B	D	B	A	B	A	C	A	D	C	D

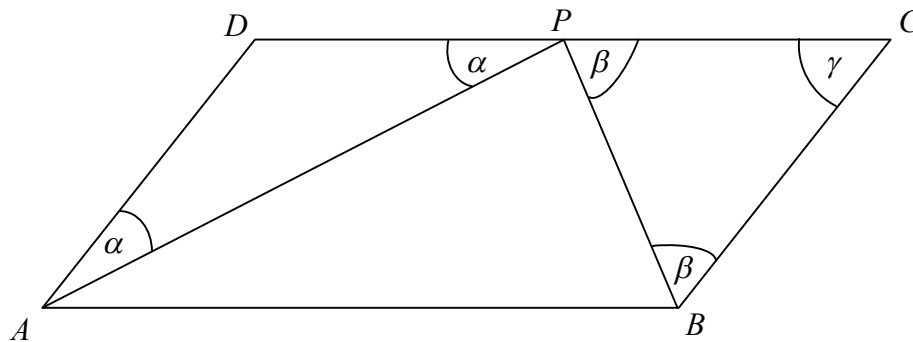
Schemat punktowania zadań otwartych

Zadanie 14. (2 pkt)

Dany jest równoległobok $ABCD$, w którym bok BC jest dwa razy krótszy od boku AB . Punkt P jest środkiem boku DC . Punkt P połączono z wierzchołkami A i B tego równoległoboku. Wykaż, że kąt APB jest kątem prostym.

I sposób rozwiązania

Rysujemy równoległobok $ABCD$ i wprowadzamy oznaczenia, np.: $|BC| = a$, $|AB| = 2a$, punkt P jest środkiem boku DC , $|\sphericalangle DAP| = |\sphericalangle DPA| = \alpha$, $|\sphericalangle PBC| = |\sphericalangle BPC| = \beta$ i $|\sphericalangle BCD| = \gamma$.



$$|BC| = a, |AB| = 2a, \text{ stąd } |AD| = |DP| = |PC| = a.$$

$$|\sphericalangle DAP| = |\sphericalangle DPA| = \alpha, |\sphericalangle PBC| = |\sphericalangle BPC| = \beta \text{ i } |\sphericalangle BCD| = \gamma, \text{ stąd } |\sphericalangle ADC| = 180^\circ - \gamma.$$

Suma miar kątów wewnętrznych dowolnego trójkąta jest równa 180° , zatem otrzymujemy następujące równości:

$$\text{w } \triangle ADP: 2\alpha + 180^\circ - \gamma = 180^\circ, \text{ stąd } 2\alpha = \gamma.$$

$$\text{w } \triangle BCP: 2\beta + \gamma = 180^\circ, \text{ stąd } 2\beta + 2\alpha = 180^\circ, \text{ zatem } \alpha + \beta = 90^\circ.$$

$$|\sphericalangle DPA| + |\sphericalangle APB| + |\sphericalangle CPB| = 180^\circ, \text{ stąd } \alpha + |\sphericalangle APB| + \beta = 180^\circ.$$

$$\alpha + |\sphericalangle APB| + \beta = 180^\circ \text{ i } \alpha + \beta = 90^\circ, \text{ zatem } |\sphericalangle APB| = 90^\circ.$$

Schemat oceniania I sposobu rozwiązania

Zdający otrzymuje1 p.
gdy:

- zauważy, że trójkąty: APD oraz BCP są równoramienne i kąty przy podstawie tych trójkątów są równe i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy,

albo

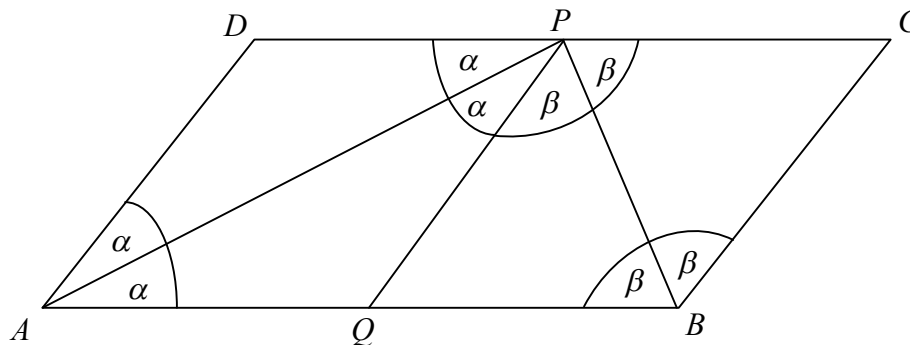
- zauważy, że trójkąty: ADP oraz BCP są równoramienne i zauważy, że suma miar kątów wewnętrznych w tych trójkątach jest równa 180° i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy.

Zdający otrzymuje2 p.
gdy:

- uzasadni, że kąt APB jest kątem prostym.

II sposób rozwiązania

Rysujemy równoległobok $ABCD$ i wprowadzamy oznaczenia, np.: $|BC| = a$, $|AB| = 2a$, punkt P jest środkiem boku DC , punkt Q jest środkiem boku AB , $|\sphericalangle DAB| = 2\alpha$, i $|\sphericalangle ABC| = 2\beta$.



Zauważmy, że czworokąty $AQPD$ oraz $QBCP$ są rombami, w których przekątne AP i BP są dwusiecznymi kątów odpowiednio DPQ oraz CPQ .

$|\sphericalangle DAB| + |\sphericalangle ABC| = 180^\circ$, stąd $2\alpha + 2\beta = 180^\circ$, zatem $\alpha + \beta = 90^\circ$.

$|\sphericalangle APB| = |\sphericalangle APQ| + |\sphericalangle QPB|$, stąd $\alpha + \beta = 90^\circ$.

Schemat oceniania II sposobu rozwiązania

Zdający otrzymuje1 p.
gdy:

- zauważy, że czworokąty $AQPD$ oraz $QBCP$ są rombami, w których przekątne AP i BP są dwusiecznymi kątów odpowiednio DPQ oraz CPQ i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy.

Zdający otrzymuje2 p.
gdy:

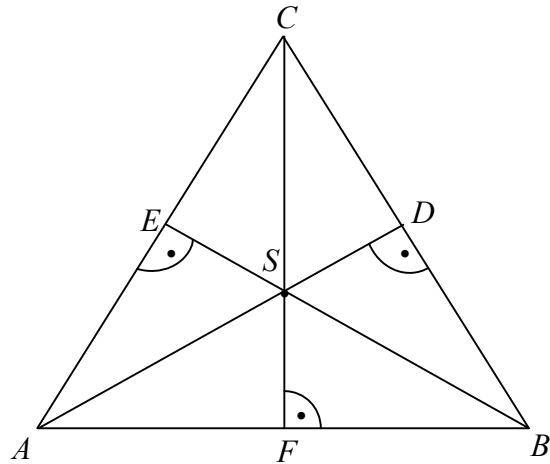
- wykorzysta zależność $|\sphericalangle DAB| + |\sphericalangle ABC| = 180^\circ$ i uzasadni, że kąt APB jest kątem prostym.

Zadanie 15. (2 pkt)

Pole trójkąta równobocznego jest równe $18\sqrt{3}$. Oblicz pole koła opisanego na tym trójkącie.

Rozwiązanie

Niech punkty A , B i C będą wierzchołkami trójkąta równobocznego ABC . Wówczas $|AB|=|BC|=|AC|=a$ i $|AD|=|BE|=|CF|=h$.



Korzystamy z własności trójkąta równobocznego i zapisujemy: $P_{ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = 18\sqrt{3}$, zatem $a^2\sqrt{3} = 72\sqrt{3}$, stąd $a = 6\sqrt{2}$.

Zauważamy, że punkt S jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie ABC i $|AS|=|BS|=|CS|=R$, stąd $R = |AS| = \frac{2}{3}|AD|$, gdzie $|AD|=h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Obliczamy promień okręgu opisanego na trójkącie równobocznym $R = \frac{a\sqrt{3}}{3} = \frac{6\sqrt{2}\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{6}$.

Obliczamy pole koła opisanego na tym trójkącie: $P = \pi R^2 = \pi(2\sqrt{6})^2 = 24\pi$.

Schemat oceniania

Zdający otrzymuje1 p. gdy:

- obliczy długość boku trójkąta równobocznego: $a = 6\sqrt{2}$ i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy,

albo

- obliczy długość boku trójkąta równobocznego z błędem rachunkowym i konsekwentnie do popełnionego błędu obliczy pole okręgu opisanego na tym trójkącie.

Uwaga

Zdający może przedstawić wynik w postaci $a = \sqrt{72}$ lub $a = 3\sqrt{8}$ lub $a = 2\sqrt{18}$.

Zdający otrzymuje2 p.
gdy:

obliczy pole koła opisanego na tym trójkącie: $P = 24\pi$.

Uwaga

Przyznajemy **2 punkty** za rozwiązanie, w którym zdający stosuje poprawne przybliżenia liczb π , $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{6}$.

Zadanie 16. (2 pkt)

W trójkącie prostokątnym cosinus kąta ostrego jest trzy razy większy od sinusa tego samego kąta. Oblicz sinus tego kąta.

I sposób rozwiązania

Zapisujemy zależność między cosinusem i sinusem kąta ostrego w trójkącie prostokątnym:

$$\cos \alpha = 3 \sin \alpha .$$

Korzystamy z tożsamości $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$, otrzymujemy:

$$\sin^2 \alpha + (3 \sin \alpha)^2 = 1$$

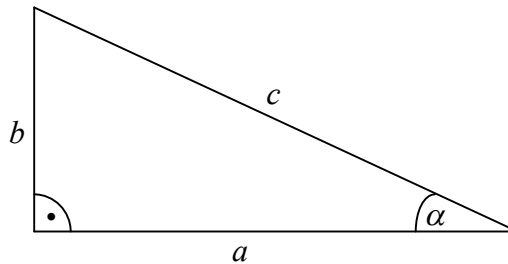
$$10 \sin^2 \alpha = 1$$

$$\sin^2 \alpha = \frac{1}{10}$$

$$\sin \alpha = \frac{\sqrt{10}}{10}$$

II sposób rozwiązania

Rysujemy trójkąt prostokątny i wprowadzamy oznaczenia np.:



Z definicji funkcji trygonometrycznych kąta ostrego w trójkącie prostokątnym otrzymujemy:

$$\sin \alpha = \frac{a}{c} \text{ i } \cos \alpha = \frac{b}{c} .$$

Zapisujemy zależność między cosinusem i sinusem kąta ostrego w trójkącie prostokątnym:

wynikającą z treści zadania: $\frac{b}{c} = 3 \frac{a}{c}$. Stąd $b = 3a$.

Z twierdzenia Pitagorasa otrzymujemy równanie: $a^2 + b^2 = c^2$, stąd

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{a^2 + (3a)^2} = \sqrt{10a} .$$

$$\text{Zatem } \sin \alpha = \frac{a}{c} = \frac{a}{\sqrt{10a}} = \frac{\sqrt{10}}{10} .$$

Schemat oceniania I i II sposobu rozwiązania

Zdający otrzymuje1 p. gdy:

- zapisze zależność między cosinusem i sinusem kąta ostrego w trójkącie prostokątnym: $\cos \alpha = 3 \sin \alpha$, skorzysta z tożsamości $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$, zapisze $\sin^2 \alpha + (3 \sin \alpha)^2 = 1$ i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy,

albo

- zapisze przeciwprostokątną trójkąta prostokątnego w zależności od jednej z przyprostokątnych, np.: $c = \sqrt{a^2 + (3a)^2}$ i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

Zdający otrzymuje2 p.
gdy:

obliczy sinus kąta: $\sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{10}$.

Uwagi

1. Jeżeli zdający, rozwiązując równanie $\sin^2 \alpha = \frac{1}{10}$ nie odrzuci rozwiązania:

$\sin \alpha = -\frac{1}{\sqrt{10}}$, to otrzymuje za całe zadanie **1punkt**.

2. Przyznajemy **2 punkty** za rozwiązanie, w którym zdający stosuje poprawne przybliżenie liczby $\sqrt{10}$.

Zadanie 17. (2 pkt)

Dany jest ciąg geometryczny (a_n) określony wzorem $a_n = 8 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$. Oblicz dziesiąty wyraz ciągu (a_n) oraz sumę pięciu początkowych wyrazów tego ciągu.

Rozwiązanie

Obliczamy dziesiąty wyraz ciągu (a_n) : $a_{10} = 8 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{10-1} = 8 \cdot \frac{1}{512} = \frac{1}{64}$.

Obliczamy pierwszy wyraz ciągu (a_n) : $a_1 = 8 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^0 = 8$.

Obliczamy iloraz ciągu (a_n) : $q = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{8 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n}{8 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}} = \frac{1}{2}$.

Obliczamy sumę czterech początkowych wyrazów tego ciągu wykorzystując wzór na sumę n początkowych wyrazów ciągu geometrycznego $S_n = a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q}$:

$$S_5 = 8 \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^5}{1 - \frac{1}{2}} = 8 \cdot \frac{1 - \frac{1}{32}}{\frac{1}{2}} = 16 \cdot \frac{31}{32} = 15 \frac{1}{2}.$$

Uwaga

Zdający może obliczyć sumę ciągu geometrycznego wykorzystując wzór:

$$S_5 = a_1 + a_1 \cdot q + a_1 \cdot q^2 + a_1 \cdot q^3 + a_1 \cdot q^4 = 8 \cdot \left(1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^4\right) =$$

$$= 8 \cdot \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16}\right) = \frac{31}{2} = 15 \frac{1}{2}.$$

lub

$$S_5 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5, \quad \text{gdzie} \quad a_1 = 8 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^0 = 8, \quad a_2 = 8 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^1 = 4, \quad a_3 = 8 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 2,$$

$$a_4 = 8 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 = 1, \quad a_5 = 8 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{2}.$$

Schemat oceniania

Zdający otrzymuje1 p.

gdy:

- obliczy $a_{10} = \frac{1}{64}$ i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy,

albo

- obliczy $a_1 = 8$ i obliczy iloraz ciągu (a_n) : $q = \frac{1}{2}$ i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy,

albo

- obliczy $a_1 = 8$, $a_2 = 4$, $a_3 = 2$, $a_4 = 1$, $a_5 = \frac{1}{2}$ i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

Zdający otrzymuje2 p. gdy:

- obliczy dziesiąty wyraz ciągu (a_n) : $a_{10} = \frac{1}{64}$ oraz sumę pięciu początkowych wyrazów tego ciągu: $S_5 = 15\frac{1}{2}$.

Uwagi

1. Jeżeli zdający popełni błąd rachunkowy przy obliczaniu pierwszego wyrazu lub ilorazu tego ciągu i konsekwentnie rozwiąże zadanie do końca, to za całe rozwiązanie otrzymuje **1 punkt**.
2. Jeżeli zdający popełni jeden błąd rachunkowy przy obliczaniu pięciu pierwszych wyrazów tego ciągu i konsekwentnie rozwiąże zadanie do końca, to za całe rozwiązanie otrzymuje **1 punkt**.

Zadanie 18. (4 pkt)

Punkty $A = (-4, 5)$ i $B = (4, 1)$ są wierzchołkami trójkąta ABC . Punkt $M = (3, 5)$ jest punktem przecięcia wysokości tego trójkąta. Znajdź równania prostych zawierających boki AC i BC tego trójkąta.

I sposób rozwiązania

Wyznaczamy współczynnik kierunkowy prostej AM : $a_{AM} = \frac{y_M - y_A}{x_M - x_A} = \frac{5 - 5}{3 + 4} = 0$.

Prosta BC jest prostopadła do prostej AM . Wyznaczamy równanie prostej BC : $x = 0$.

Wyznaczamy współczynnik kierunkowy prostej BM : $a_{BM} = \frac{y_M - y_B}{x_M - x_B} = \frac{5 - 1}{3 - 4} = -4$.

Prosta AC jest prostopadła do prostej BM , stąd jej równanie ma postać: $y - 5 = \frac{1}{4}(x + 4)$, po przekształceniu prosta AC ma równanie: $y = \frac{1}{4}x + 6$.

Uwaga

Zdający może zauważyć, że punkty A oraz M leżą na prostej $y = 5$ i zapisać, że prosta BC prostopadła do prostej AM ma postać $x = 4$.

II sposób rozwiązania

Wyznaczamy współrzędne wektora $\overrightarrow{BM} = [-1, 4]$.

Równanie prostych prostopadłych do tego wektora ma postać: $-x + 4y + C = 0$. Wybieramy prostą przechodzącą przez punkt A , stąd $4 + 20 + C = 0$, zatem $C = -24$.

Równanie prostej AC ma postać: $-x + 4y - 24 = 0$, po przekształceniu otrzymujemy $y = \frac{1}{4}x + 6$.

Wyznaczamy współrzędne wektora $\overrightarrow{AM} = [7, 0]$.

Równanie prostych prostopadłych do tego wektora ma postać: $7x + D = 0$. Wybieramy prostą przechodzącą przez punkt B , stąd $28 + D = 0$, więc $D = -28$.

Równanie prostej BC ma postać: $7x - 28 = 0$, po przekształceniu otrzymujemy $x = 4$.

Uwaga

Równanie prostej BC możemy wyznaczyć bezpośrednio korzystając z treści zadania.

Punkty A oraz M leżą na prostej $y = 5$, więc prosta BC prostopadła do prostej AM ma postać $x = 4$.

Schemat oceniania I i II sposobu rozwiązania

Rozwiązanie, w którym postęp jest wprawdzie niewielki, ale konieczny na drodze do całkowitego rozwiązania zadania.....1 p.

- obliczenie współczynnika kierunkowego prostej BM : $a_{BM} = -4$,
- albo
- zapisanie równania prostej AM : $y = 5$,
- albo
- obliczenie współrzędnych wektora $\overline{BM} = [-1, 4]$,
- albo
- obliczenie współrzędnych wektora $\overline{AM} = [7, 0]$.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp.....2 p.

- obliczenie współczynnika kierunkowego prostej BM : $a_{BM} = -4$ i zapisanie równania prostej AM : $y = 5$,
- albo
- obliczenie współrzędnych wektora $\overline{BM} = [-1, 4]$ i wektora $\overline{AM} = [7, 0]$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania3 p.

- obliczenie współczynnika kierunkowego prostej AC : $a_{AC} = \frac{1}{4}$ i zauważenie, że prosta BC jest równoległa do osi Oy i zapisanie równania prostej: $x = 4$,
- albo
- zapisanie równania prostych prostopadłych do wektora \overline{BM} : $-x + 4y + C = 0$ i zapisanie równania prostych prostopadłych do wektora \overline{AM} : $7x + C_1 = 0$.

Rozwiązanie pełne4 p.

wyznaczenie równania prostej AC : $y = \frac{1}{4}x + 6$ i równania prostej BC : $x = 4$.

III sposób rozwiązania

Obliczamy współczynnik kierunkowy prostej AB : $a_{AB} = \frac{1-5}{4+4} = -\frac{1}{2}$. Prosta AB jest prostopadła do prostej CM , zatem jej równanie ma postać: $y-5=2(x-3)$. Po przekształceniu otrzymujemy: $y=2x-1$.

Z treści zadania wynika, że punkty A oraz M leżą na prostej $y=5$, więc prosta BC prostopadła do prostej AM ma postać $x=4$.

Proste BC i CM przecinają się w punkcie C . Rozwiązujemy układ $\begin{cases} y=2x-1 \\ x=4 \end{cases}$ i otrzymujemy

współrzędne punktu C : $C=(4,7)$. Wyznaczamy równanie prostej BC : $y-7=\frac{7-5}{4+4}(x-4)$.

Po przekształceniu otrzymujemy $y=\frac{1}{4}x+6$.

Schemat oceniania III sposobu rozwiązania

Rozwiązanie, w którym postępek jest wprowadzić niewielki, ale konieczny na drodze do całkowitego rozwiązania zadania.....1 p.

Obliczenie współczynnika kierunkowego prostej AB : $a_{AB} = -\frac{1}{2}$ i zauważenie, że punkty A oraz M leżą na prostej $y=5$.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postępek.....2 p.
Wyznaczenie równania prostej CM : $y=2x-1$ oraz równania prostej BC : $x=4$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania.....3 p.

Wyznaczenie współrzędnych punktu C : $C=(4,7)$.

Rozwiązanie pełne4 p.

Wyznaczenie równania prostej AC : $y=\frac{1}{4}x+6$ i równania prostej BC : $x=4$.

Zadanie 19. (5 pkt)

Z dwóch miejscowości A i B oddalonych od siebie o 28km wyjechali rowerami naprzeciw siebie Kasia i Tomek. Kasia wyruszyła 20 minut wcześniej niż Tomek i jechała z prędkością o $7 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ mniejszą od prędkości z jaką jechał Tomek. Spotkali się w połowie drogi. Oblicz z jakimi średnimi prędkościami jechali do miejsca spotkania.

Uwaga

W zamieszczonym schemacie używamy niewiadomych v , t oznaczających odpowiednio, prędkość i czas. Nie wymagamy, by niewiadome były wyraźnie opisane na początku rozwiązania, o ile z postaci równań jasno wynika ich znaczenie.

I sposób rozwiązania

Przyjmujemy oznaczenia np.: t – czas jazdy Kasi, v – średnia prędkość jazdy Kasi w kilometrach na godzinę.

Zapisujemy zależność między czasem a prędkością w sytuacji opisanej w zadaniu dla Tomka:

$$\left(t - \frac{1}{3}\right) \cdot (v + 7) = 14$$

Następnie zapisujemy układ równań
$$\begin{cases} t \cdot v = 14 \\ \left(t - \frac{1}{3}\right) \cdot (v + 7) = 14 \end{cases}$$

Rozwiązując układ równań doprowadzamy do równania z jedną niewiadomą, np.:

$$\left(t - \frac{1}{3}\right) \cdot (v + 7) = 14$$

$$14 + \frac{98}{v} - \frac{1}{3}v - \frac{7}{3} = 14$$

$$v^2 + 7v - 294 = 0$$

$$\Delta = 49 + 1176 = 35^2$$

$$v_1 = \frac{-7 - 35}{2} = -21, \quad v_2 = \frac{-7 + 35}{2} = 14$$

v_1 jest sprzeczne z warunkami zadania.

Obliczamy średnią prędkość z jaką jechał Tomek: $v + 7 = 14 + 7 = 21 \frac{\text{km}}{\text{h}}$

Odp. Średnia prędkość z jaką jechała Kasia jest równa $14 \frac{\text{km}}{\text{h}}$, a średnia prędkość z jaką

jechał Tomek jest równa $21 \frac{\text{km}}{\text{h}}$.

II sposób rozwiązania

Przyjmujemy oznaczenia np.: t – czas jazdy Tomka, v – średnia prędkość jazdy Tomka w kilometrach na godzinę.

Zapisujemy zależność między czasem a prędkością w sytuacji opisanej w zadaniu dla Kasi:

$$\left(t + \frac{1}{3}\right) \cdot (v - 7) = 14$$

Następnie zapisujemy układ równań
$$\begin{cases} t \cdot v = 14 \\ \left(t + \frac{1}{3}\right) \cdot (v - 7) = 14 \end{cases}$$

Rozwiązując układ równań doprowadzamy do równania z jedną niewiadomą, np.:

$$\left(t + \frac{1}{3}\right) \cdot (v - 7) = 14$$

$$14 - \frac{98}{v} + \frac{1}{3}v - \frac{7}{3} = 14$$

$$v^2 - 7t - 294 = 0$$

$$\Delta = 49 + 1176 = 35^2$$

$$v_1 = \frac{7-35}{2} = -14, \quad v_2 = \frac{7+35}{2} = 21$$

v_1 jest sprzeczne z warunkami zadania.

Obliczamy średnią prędkość z jaką jechała Kasia: $v - 7 = 21 - 7 = 14 \frac{\text{km}}{\text{h}}$

Odp. Średnia prędkość z jaką jechała Kasia jest równa $14 \frac{\text{km}}{\text{h}}$, a średnia prędkość z jaką

jechał Tomek jest równa $21 \frac{\text{km}}{\text{h}}$.

Schemat oceniania I i II sposobu rozwiązania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania 1 p.

Zapisanie równania z dwiema niewiadomymi

$\left(t - \frac{1}{3}\right) \cdot (v + 7) = 14$, gdzie t oznacza czas jazdy Kasi, a v średnią prędkość jazdy Kasi w kilometrach na godzinę,

lub

$\left(t + \frac{1}{3}\right) \cdot (v - 7) = 14$, gdzie t oznacza czas jazdy Tomka, a v średnią prędkość jazdy Tomka w kilometrach na godzinę.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp 2 p.

Zapisanie układu równań z niewiadomymi v i t , np.:

$$\begin{cases} t \cdot v = 14 \\ \left(t - \frac{1}{3}\right) \cdot (v + 7) = 14 \end{cases} \quad \text{lub} \quad \begin{cases} t \cdot v = 14 \\ \left(t + \frac{1}{3}\right) \cdot (v - 7) = 14 \end{cases}$$

Uwaga

Zdający nie musi zapisywać układu równań, może bezpośrednio zapisać równanie z jedną niewiadomą.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania 3 p.Zapisanie równania z jedną niewiadomą v , np.:

$$\left(\frac{14}{v} - \frac{1}{3}\right) \cdot (v+7) = 14 \quad \text{lub} \quad \frac{98}{v} - \frac{1}{3}v - \frac{7}{3} = 0 \quad \text{lub} \quad \left(\frac{14}{v} + \frac{1}{3}\right) \cdot (v-7) = 14 \quad \text{lub} \\ -\frac{98}{v} + \frac{1}{3}v - \frac{7}{3} = 0.$$

Zostały pokonane zasadnicze trudności zadania, ale w trakcie ich pokonywania zostały popełnione błędy rachunkowe lub usterki 2 p.**Rozwiązanie zadania do końca lecz z usterkami, które jednak nie przekreślają poprawności rozwiązania (np. błędy rachunkowe) 4 p.**

- rozwiązanie równania z niewiadomą v (prędkość jazdy Kasi) z błędem rachunkowym i konsekwentne obliczenie średniej prędkości z jaką jechał Tomek,
- albo
- rozwiązanie równania z niewiadomą v (prędkość jazdy Tomka) z błędem rachunkowym i konsekwentne obliczenie średniej prędkości z jaką jechała Kasia.

Rozwiązanie pełne 5 p.Obliczenie średnich prędkości z jakimi jechali Kasia i Tomek: $14 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ i $21 \frac{\text{km}}{\text{h}}$.**III sposób rozwiązania**Przyjmujemy oznaczenia np.: t – czas jazdy Kasi, v – średnia prędkość jazdy Kasi w kilometrach na godzinę.

Zapisujemy zależność między czasem a prędkością w sytuacji opisanej w zadaniu dla Tomka:

$$\left(t - \frac{1}{3}\right) \cdot (v+7) = 14$$

Następnie zapisujemy układ równań
$$\begin{cases} t \cdot v = 14 \\ \left(t - \frac{1}{3}\right) \cdot (v+7) = 14 \end{cases}$$

Rozwiązując układ równań doprowadzamy do równania z jedną niewiadomą, np.:

$$\left(t - \frac{1}{3}\right) \cdot (v+7) = 14$$

$$14 + 7t - \frac{14}{3t} - \frac{7}{3} = 14$$

$$21t^2 - 7t - 14 = 0$$

$$3t^2 - t - 2 = 0$$

$$\Delta = 1 + 24 = 5^2$$

$$t_1 = \frac{1-5}{6} = -\frac{2}{3}, \quad t_2 = \frac{1+5}{6} = 1$$

 t_1 jest sprzeczne z warunkami zadania.Obliczamy średnią prędkość z jaką jechała Kasia: $v = \frac{14}{1} = 14 \frac{\text{km}}{\text{h}}$.

Obliczamy średnią prędkość z jaką jechał Tomek: $v + 7 = 14 + 7 = 21 \frac{\text{km}}{\text{h}}$

Odp. Średnia prędkość z jaką jechała Kasia jest równa $14 \frac{\text{km}}{\text{h}}$, a średnia prędkość z jaką jechał Tomek jest równa $21 \frac{\text{km}}{\text{h}}$.

IV sposób rozwiązania

Przyjmujemy oznaczenia np.: t – czas jazdy Tomka, v – średnia prędkość jazdy Tomka w kilometrach na godzinę.

Zapisujemy zależność między czasem a prędkością w sytuacji opisanej w zadaniu dla Kasi:

$$\left(t + \frac{1}{3}\right) \cdot (v - 7) = 14$$

Następnie zapisujemy układ równań
$$\begin{cases} t \cdot v = 14 \\ \left(t + \frac{1}{3}\right) \cdot (v - 7) = 14 \end{cases}$$

Rozwiązując układ równań doprowadzamy do równania z jedną niewiadomą, np.:

$$\left(t + \frac{1}{3}\right) \cdot (v - 7) = 14$$

$$14 - 7t + \frac{14}{3t} - \frac{7}{3} = 14$$

$$21t^2 + 7t - 14 = 0$$

$$3t^2 + t - 2 = 0$$

$$\Delta = 1 + 24 = 5^2$$

$$t_1 = \frac{-1-5}{6} = -1, \quad t_2 = \frac{-1+5}{6} = \frac{2}{3}$$

t_1 jest sprzeczne z warunkami zadania.

Obliczamy średnią prędkość z jaką jechał Tomek: $v = \frac{14}{\frac{2}{3}} = 21 \frac{\text{km}}{\text{h}}$.

Obliczamy średnią prędkość z jaką jechała Kasia: $v - 7 = 21 - 7 = 14 \frac{\text{km}}{\text{h}}$

Odp. Średnia prędkość z jaką jechała Kasia jest równa $14 \frac{\text{km}}{\text{h}}$, a średnia prędkość z jaką jechał Tomek jest równa $21 \frac{\text{km}}{\text{h}}$.

Schemat oceniania III i IV sposobu rozwiązania**Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania 1 p.**

Zapisanie równania z dwiema niewiadomymi

$$\left(t - \frac{1}{3}\right) \cdot (v + 7) = 14$$
, gdzie t oznacza czas jazdy Kasi, a v średnią prędkość jazdy Kasi w kilometrach na godzinę.

lub

$$\left(t + \frac{1}{3}\right) \cdot (v - 7) = 14$$
, gdzie t oznacza czas jazdy Tomka, a v średnią prędkość jazdy Tomka w kilometrach na godzinę.
Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp 2 p.Zapisanie układu równań z niewiadomymi v i t , np.:

$$\begin{cases} t \cdot v = 14 \\ \left(t - \frac{1}{3}\right) \cdot (v + 7) = 14 \end{cases} \quad \text{lub} \quad \begin{cases} t \cdot v = 14 \\ \left(t + \frac{1}{3}\right) \cdot (v - 7) = 14 \end{cases}$$

Uwaga

Zdający nie musi zapisywać układu równań, może bezpośrednio zapisać równanie z jedną niewiadomą.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania 3 p.Zapisanie równania z jedną niewiadomą t , np.:

$$\left(t - \frac{1}{3}\right) \cdot \left(\frac{14}{t} + 7\right) = 14 \quad \text{lub} \quad 7t - \frac{14}{3t} - \frac{7}{3} = 0 \quad \text{lub} \quad \left(t + \frac{1}{3}\right) \cdot \left(\frac{14}{t} - 7\right) = 14 \quad \text{lub} \quad -7t + \frac{14}{3t} - \frac{7}{3} = 0$$

Zostały pokonane zasadnicze trudności zadania, ale w trakcie ich pokonywania zostały popełnione błędy rachunkowe lub usterki 2 p.**Rozwiązanie zadania do końca lecz z usterkami, które jednak nie przekreślają poprawności rozwiązania (np. błędy rachunkowe) 4 p.**

- rozwiązanie równania z niewiadomą t z błędem rachunkowym i konsekwentne obliczenie średnich prędkości z jakimi jechali Kasia i Tomek,

albo

- obliczenie czasu jazdy Kasi: $t = 1$ i nie obliczenie średnich prędkości z jakimi jechali Kasia i Tomek,

albo

- obliczenie czasu jazdy Tomka: $t = \frac{2}{3}$ i nie obliczenie średnich prędkości z jakimi jechali Kasia i Tomek.

Rozwiązanie pełne 5 p.

Obliczenie średnich prędkości z jakimi jechali Kasia i Tomek: $14 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ i $21 \frac{\text{km}}{\text{h}}$.

Uwagi

1. Jeżeli zdający porównuje wielkości różnych typów, np. zapisze równanie $(t - 20)(v + 7) = 14$, to otrzymuje **0 punktów**.
2. Jeżeli zdający odgadnie średnią prędkość jazdy Kasi i Tomka i nie uzasadni, że jest to jedyne rozwiązanie, to otrzymuje **1 punkt**.