



## Materiały diagnostyczne z matematyki poziom podstawowy

luty 2012

### Klucz odpowiedzi do zadań zamkniętych schemat oceniania

Materiały diagnostyczne przygotował zespół w składzie:

**Agnieszka Salaj**

Nauczyciel I Liceum Ogólnokształcącego im. Adama Mickiewicza w Białymstoku

**Anna Rybak**

Pracownik Uniwersytetu w Białymstoku

**Artur Miśkiewicz**

Nauczyciel i Liceum Ogólnokształcącego im. Stefana Żeromskiego w Zespole Szkół Ogólnokształcących w Iławie  
Wicedyrektor Liceum Ogólnokształcącego im. Stefana Żeromskiego w Zespole Szkół Ogólnokształcących w Iławie

**Cezary Kacprzyk**

Nauczyciel III Liceum Ogólnokształcącego im. Alfreda Lityńskiego w Zespole Szkół nr 1 w Suwałkach

**Dorota Mozyrska**

Pracownik Politechniki Białostockiej

**Elżbieta Guziejko**

Nauczyciel Liceum Ogólnokształcącego im. Jana Kochanowskiego w Olecku

**Ewa Olszewska**

Nauczyciel Technikum w Zespole Szkół Handlowo-Ekonomicznych im. M. Kopernika w Białymstoku

**Ewa Pawłuszewicz**

Pracownik Politechniki Białostockiej

**Ewa Ziętek**

Nauczyciel II Liceum Ogólnokształcące im. Konstantego Ildefonsa Gałczyńskiego w Olsztynie  
Nauczyciel Technikum nr 6 w Zespole Szkół Elektronicznych i Telekomunikacyjnych w Olsztynie

**Irena Jakóbowska**

Nauczyciel VI Liceum Ogólnokształcącego im. G. Narutowicza w Olsztynie  
Wicedyrektor VI Liceum Ogólnokształcącego im. G. Narutowicza w Olsztynie

**Tomasz Chomicz**

Nauczyciel w Zespole Szkół Ogólnokształcących i Zawodowych im. Jarosława Iwaszkiewicza w Ciechanowcu

**Agata Siwik**

Starszy ekspert ds. egzaminu maturalnego z matematyki w Okręgowej Komisji Egzaminacyjnej  
Kierownik Zespołu Matematyczno-Przyrodniczego w Wydziale Sprawdzianów, Egzaminów Gimnazjalnych i Matur  
w Okręgowej Komisji Egzaminacyjnej w Łomży

## Odpowiedzi do zadań zamkniętych

Nr zadania	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
odpowiedź	C	A	B	A	B	C	D	C	C	B	C	D	A	B	A	D	C	D	B	D	A	D	B	C

### Schemat punktowania zadań otwartych

#### **Zadanie 25. (2 pkt)**

Rozwiąż równanie  $\frac{3}{x} + \frac{x}{3} = \frac{5}{2}$  dla  $x \neq 0$ .

#### **Rozwiązanie**

Mnożymy równanie  $\frac{3}{x} + \frac{x}{3} = \frac{5}{2}$  obustronnie przez  $6x$  i zapisujemy równanie kwadratowe  $2x^2 - 15x + 18 = 0$ .

Znajdujemy pierwiastki trójmianu kwadratowego  $2x^2 - 15x + 18$

- obliczamy wyróżnik trójmianu kwadratowego:

$$\Delta = 225 - 4 \cdot 2 \cdot 18 = 81 \text{ i stąd } x_1 = \frac{15-9}{4} = \frac{3}{2} \text{ oraz } x_2 = \frac{15+9}{4} = 6$$

albo

- stosujemy wzory Viete'a:

$$x_1 + x_2 = \frac{15}{2} \text{ oraz } x_1 \cdot x_2 = 9 \text{ i stąd } x_1 = \frac{3}{2} \text{ oraz } x_2 = 6.$$

#### **Schemat oceniania**

**Zdający otrzymuje .....1 punkt**

gdy

- poprawnie przekształci równanie  $\frac{3}{x} + \frac{x}{3} = \frac{5}{2}$  do równania kwadratowego  $2x^2 - 15x + 18 = 0$  i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy.

albo

- zapisze równanie kwadratowe z błędem i konsekwentnie do popełnionego błędu rozwiąże równanie.

**Zdający otrzymuje .....2 punkty**

gdy poprawnie wyznaczy oba pierwiastki równania:  $x_1 = \frac{3}{2}$  oraz  $x_2 = 6$ .

#### **Uwagi**

1. Jeżeli zdający przekształcając równanie  $\frac{3}{x} + \frac{x}{3} = \frac{5}{2}$  otrzyma równanie liniowe, to za takie rozwiązanie otrzymuje **0 punktów**.
2. Jeżeli zdający zapisze równanie kwadratowe z błędem i jeden z pierwiastków będzie równy 0, to za takie rozwiązanie otrzymuje **0 punktów**.

**Zadanie 26. (2 pkt)**

Wykaż, że jeśli  $x > 0$  i  $y > 0$ , to  $\frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{x} \geq x + y$ .

**I sposób rozwiązania**

Przekształcamy nierówność  $\frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{x} \geq x + y$  do postaci  $\frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{x} - x - y \geq 0$ .

Sprowadzamy lewą stronę otrzymanej nierówności do postaci iloczynowej, wykorzystując np. wzory skróconego mnożenia:

$$\frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{x} - x - y = \frac{x^3 + y^3 - x^2y - xy^2}{xy} = \frac{(x+y)(x^2 - xy + y^2) - xy(x+y)}{xy} = \frac{(x+y)(x-y)^2}{xy}.$$

Z założenia mamy  $x > 0$  i  $y > 0$ , stąd  $xy > 0$  i  $x + y > 0$ , natomiast nierówność  $(x - y)^2 \geq 0$  jest prawdziwa dla dowolnych  $x$  i  $y$ , zatem  $\frac{(x+y)(x-y)^2}{xy} \geq 0$ . Co kończy dowód.

**Uwaga**

Uczeń może lewą stronę nierówności  $\frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{x} - x - y \geq 0$  przekształcić do postaci

iloczynowej, grupując wyrazy:

$$\frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{x} - x - y = \frac{x^3 + y^3 - x^2y - xy^2}{xy} = \frac{x^2(x-y) - y^2(x-y)}{xy} = \frac{(x+y)(x-y)^2}{xy}.$$

**Schemat oceniania I sposobu rozwiązania**

**Zdający otrzymuje .....1 punkt**

gdy

- zapisze lewą stronę nierówności  $\frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{x} - x - y \geq 0$  w postaci

$$\frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{x} - x - y = \frac{x^3 + y^3 - x^2y - xy^2}{xy} = \frac{(x+y)(x^2 - xy + y^2) - xy(x+y)}{xy}$$

i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy,

albo

- zapisze lewą stronę nierówności  $\frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{x} - x - y \geq 0$  w postaci

$$\frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{x} - x - y = \frac{x^3 + y^3 - x^2y - xy^2}{xy} = \frac{x^2(x-y) - y^2(x-y)}{xy}$$

i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy.

**Zdający otrzymuje .....2 punkty**

gdy przeprowadzi pełne rozumowanie.

**II sposób rozwiązania**

Mnożymy obie strony nierówności  $\frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{x} \geq x + y$  przez  $xy$  (z założenia mamy  $x > 0$

i  $y > 0$ ) i zapisujemy nierówność w postaci  $x^3 + y^3 \geq x^2y + xy^2$ .

Stosujemy wzór skróconego mnożenia i zapisujemy nierówność  $x^3 + y^3 \geq x^2y + xy^2$  w postaci np.  $(x + y)(x^2 - xy + y^2) \geq (x + y)xy$ .

Następnie sprowadzamy nierówność do postaci:  $(x + y)(x - y)^2 \geq 0$ .

Z założenia mamy  $x > 0$  i  $y > 0$ , stąd  $x + y > 0$ , natomiast nierówność  $(x - y)^2 \geq 0$  jest prawdziwa dla dowolnych  $x$  i  $y$ , zatem  $(x + y)(x - y)^2 \geq 0$ . Co kończy dowód.

**Uwaga**

Uczeń może przekształcić nierówność  $x^3 + y^3 \geq x^2y + xy^2$  do postaci  $x^3 + y^3 - x^2y - xy^2 \geq 0$ , następnie pogrupować wyrazy i zapisać lewą stronę nierówności w postaci  $x^2(x - y) - y^2(x - y) \geq 0$ .

**Schemat oceniania II sposób rozwiązania**

**Zdający otrzymuje .....1 punkt**

gdy

- zapisze nierówność  $x^3 + y^3 \geq x^2y + xy^2$  w postaci  $(x + y)(x^2 - xy + y^2) \geq (x + y)xy$ , albo
  - zapisze nierówność  $x^3 + y^3 \geq x^2y + xy^2$  w postaci  $x^2(x - y) - y^2(x - y) \geq 0$ ,
- i na tym zakończy lub dalej popęlnia błędy.

**Zdający otrzymuje .....2 punkty**

gdy przeprowadzi pełne rozumowanie.

**Uwaga**

Jeżeli zdający podstawili konkretne wartości w miejsce  $x$  i  $y$ , to przyznajemy **0 punktów**.

**III sposób rozwiązania**

Dla dowolnych  $x$  i  $y$ , prawdziwa jest nierówność:  $(x - y)^2 \geq 0$ .

Z założenia mamy  $x > 0$  i  $y > 0$ , stąd  $x + y > 0$ , zatem  $(x + y)(x - y)^2 \geq 0$ .

Stosujemy wzór skróconego mnożenia i redukcję wyrazów i przekształcamy lewą stronę nierówności  $(x + y)(x - y)^2 \geq 0$  do postaci:  $x^3 + y^3 - x^2y - xy^2 \geq 0$ , a następnie do postaci  $x^3 + y^3 \geq xy(x + y)$ .

Dzielimy obie strony nierówności  $x^3 + y^3 \geq xy(x + y)$  przez  $xy$  (z założenia mamy  $x > 0$  i  $y > 0$ , stąd  $xy > 0$ ) i wnioskujemy, że  $\frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{x} \geq x + y$ .

**Schemat oceniania III sposobu rozwiązania**

**Zdający otrzymuje .....1 punkt**

gdy korzystając z założenia  $x > 0$  i  $y > 0$ , doprowadzi nierówność  $(x - y)^2 \geq 0$  do nierówności  $x^3 + y^3 - x^2y - xy^2 \geq 0$  i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

**Zdający otrzymuje .....2 punkty**

gdy przeprowadzi pełne rozumowanie.

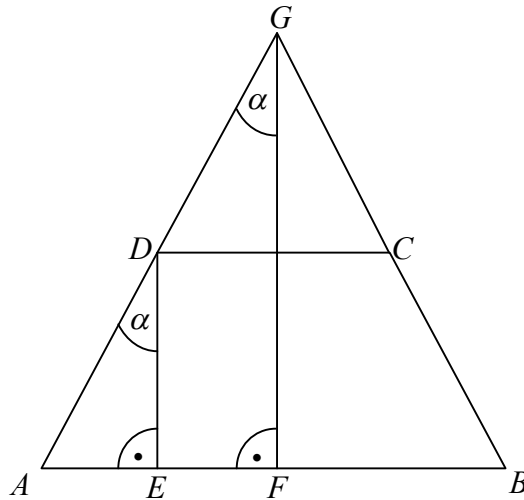
**Uwaga**

Zdający otrzymuje **1 punkt**, jeśli uzasadniając daną nierówność nie zapisze, że  $x + y > 0$  i  $x \cdot y > 0$ .

**Zadanie 27. (2 pkt)**

Dany jest trapez  $ABCD$ . Dłuższa podstawa  $AB$  ma długość  $m$ , pozostałe trzy boki trapezu są równej długości. Przedłużenia ramion trapezu  $AD$  i  $BC$  przecinają się w punkcie  $E$  pod kątem  $2\alpha$ . Oblicz obwód tego trapezu.

**I sposób rozwiązania**



Wprowadzamy oznaczenia  $|AD| = |BC| = |CD| = x$  i  $|AB| = m$ .

Zauważamy, że trójkąty  $ADE$  i  $AGF$  są podobne, zatem  $|\sphericalangle ADE| = |\sphericalangle AGF| = \alpha$ .

Różnica między długościami podstaw trapezu jest równa  $|AB| - |CD| = m - x$ . Stąd

$$|AE| = \frac{m - x}{2}.$$

Trójkąt  $ADE$  jest prostokątny, zatem  $\sin \alpha = \frac{|AE|}{|AD|} = \frac{\frac{m - x}{2}}{x}$ . Stąd  $x = \frac{m}{2 \sin \alpha + 1}$ .

Wyznaczamy obwód trapezu  $ABCD$ :

$$O = |AB| + 3|AD| = m + 3x = m + 3 \frac{m}{2 \sin \alpha + 1} = \frac{2m \sin \alpha + 4m}{2 \sin \alpha + 1} = \frac{2m(\sin \alpha + 2)}{2 \sin \alpha + 1}.$$

**Schemat oceniania I sposób rozwiązania**

**Zdający otrzymuje .....1 punkt**

**gdy**

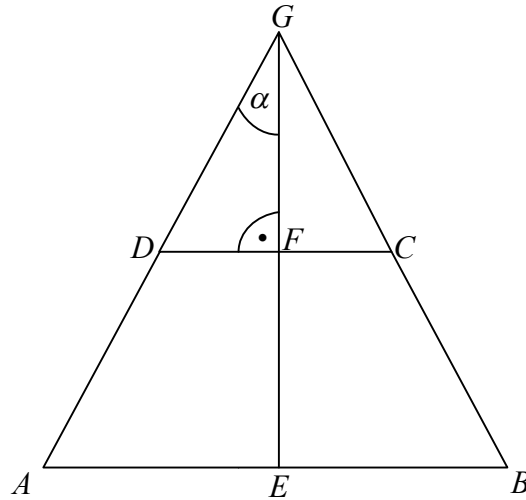
zauważy, że trójkąty  $ADE$  i  $AGF$  są podobne oraz zapisze równość  $\sin \alpha = \frac{\frac{m - x}{2}}{x}$ .

**Zdający otrzymuje .....2 punkty**

gdy wyznaczy obwód trapezu  $O = \frac{2m(\sin \alpha + 2)}{2 \sin \alpha + 1}$ .

**Uwagi**

1. Jeżeli zdający popełni błąd rachunkowy przy wyznaczaniu  $x$  i dalej konsekwentnie obliczy obwód trapezu, to za takie rozwiązanie przyznajemy **1 punkt**.
2. Nie wymagamy postaci uporządkowanej w wyznaczonym obwodzie trapezu.

**II sposób rozwiązania**

Zauważamy, że trójkąty  $ABG$  i  $DCG$  są podobne.

Wprowadzamy oznaczenia  $|AD| = |BC| = |CD| = x$ ,  $|DG| = |CG| = y$  i  $|AB| = m$ .

Trójkąty  $ABG$  i  $DCG$  są podobne, zatem  $\frac{|DC|}{|AB|} = \frac{|DG|}{|AG|}$ . Stąd  $\frac{x}{m} = \frac{y}{x+y}$ .

Trójkąt  $DFG$  jest prostokątny, zatem  $\sin \alpha = \frac{|DF|}{|DG|} = \frac{\frac{x}{2}}{y}$ . Stąd  $y = \frac{\frac{1}{2}x}{\sin \alpha} = \frac{x}{2 \sin \alpha}$ .

Podstawiamy  $y = \frac{x}{2 \sin \alpha}$  do równania  $\frac{x}{m} = \frac{y}{x+y}$  i otrzymujemy  $x = \frac{m}{2 \sin \alpha + 1}$ .

Wyznaczamy obwód trapezu  $ABCD$ :

$$O = |AB| + 3|CD| = m + 3x = m + 3 \frac{m}{2 \sin \alpha + 1} = \frac{2m \sin \alpha + 4m}{2 \sin \alpha + 1} = \frac{2m(\sin \alpha + 2)}{2 \sin \alpha + 1}.$$

**Schemat oceniania II sposób rozwiązania**

Zdający otrzymuje .....1 punkt

gdy

zauważy, że trójkąty  $ABG$  i  $DCG$  są podobne, stąd  $\frac{x}{m} = \frac{y}{x+y}$  oraz zauważy, że

$$\sin \alpha = \frac{|DF|}{|DG|} = \frac{\frac{x}{2}}{y}$$

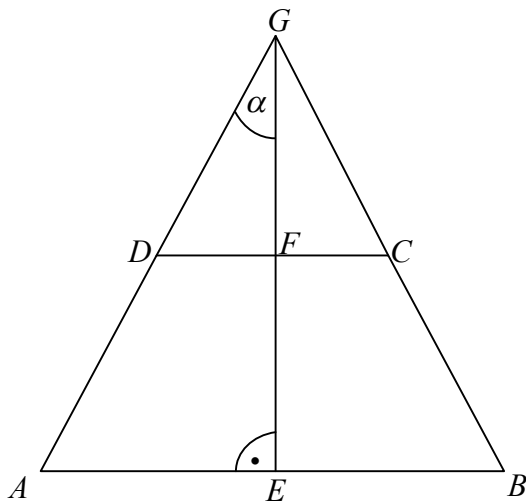
Zdający otrzymuje .....2 punkty

gdy wyznaczy obwód trapezu  $O = \frac{2m(\sin \alpha + 2)}{2 \sin \alpha + 1}$ .

**Uwagi**

1. Nie wymagamy uzasadnienia podobieństwa trójkątów.
2. Zdający może od razu zapisać proporcję bez stwierdzenia faktu podobieństwa trójkątów.
3. Jeżeli zdający popełni błąd rachunkowy przy wyznaczaniu  $x$  i dalej konsekwentnie obliczy obwód trapezu, to za takie rozwiązanie przyznajemy **1 punkt**.
4. Nie wymagamy postaci uporządkowanej w wyznaczonym obwodzie trapezu.

**III sposób rozwiązania**



Zauważamy, że trójkąty  $ABG$  i  $DCG$  są podobne.

Wprowadzamy oznaczenia  $|AD| = |BC| = |CD| = x$ ,  $|DG| = |CG| = y$  i  $|AB| = m$ .

Trójkąty  $ABG$  i  $DCG$  są podobne, zatem  $\frac{|DC|}{|AB|} = \frac{|DG|}{|AG|}$ . Stąd  $\frac{x}{m} = \frac{y}{x+y}$ .



Trójkąt  $AEG$  jest prostokątny, zatem  $\sin \alpha = \frac{|AE|}{|AG|} = \frac{\frac{m}{2}}{x+y}$ . Stąd  $y = \frac{\frac{m}{2} - x \sin \alpha}{\sin \alpha}$ .

Podstawiamy  $y = \frac{\frac{m}{2} - x \sin \alpha}{\sin \alpha}$  do równania  $\frac{x}{m} = \frac{y}{x+y}$  i otrzymujemy  $x = \frac{m}{2 \sin \alpha + 1}$ .

Wyznaczamy obwód trapezu  $ABCD$ :

$$O = |AB| + 3|CD| = m + 3x = m + 3 \frac{m}{2 \sin \alpha + 1} = \frac{2m \sin \alpha + 4m}{2 \sin \alpha + 1} = \frac{2m(\sin \alpha + 2)}{2 \sin \alpha + 1}.$$

### **Schemat oceniania III sposób rozwiązania**

**Zdający otrzymuje .....1 punkt**

Gdy zauważy, że trójkąty  $ABG$  i  $DCG$  są podobne, stąd  $\frac{x}{m} = \frac{y}{x+y}$  oraz zauważy, że

$$\sin \alpha = \frac{|AE|}{|AG|} = \frac{\frac{m}{2}}{x+y}.$$

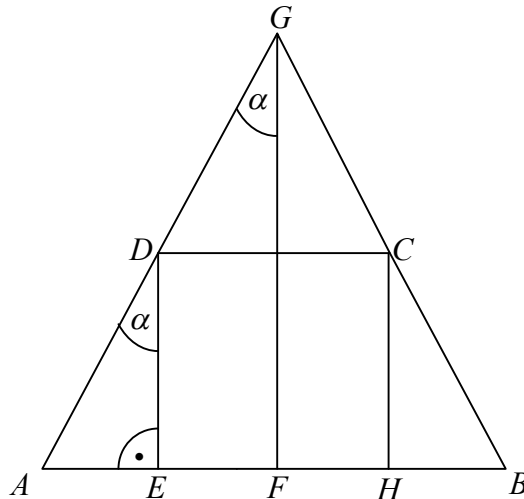
**Zdający otrzymuje .....2 punkty**

gdy wyznaczy obwód trapezu  $O = \frac{2m(\sin \alpha + 2)}{2 \sin \alpha + 1}$ .

### **Uwagi**

1. Nie wymagamy uzasadnienia podobieństwa trójkątów.
2. Zdający może od razu zapisać proporcję bez stwierdzenia faktu podobieństwa trójkątów.
3. Jeżeli zdający popełni błąd rachunkowy przy wyznaczaniu  $x$  i dalej konsekwentnie obliczy obwód trapezu, to za takie rozwiązanie przyznajemy **1 punkt**.
4. Nie wymagamy postaci uporządkowanej w wyznaczonym obwodzie trapezu.

**IV sposób rozwiązania**



Wprowadzamy oznaczenia  $|AD| = |BC| = |CD| = x$ ,  $|DE| = h$  i  $|AB| = m$ .

Zauważamy, że trójkąty  $ADE$  i  $AGF$  są podobne, zatem  $|\sphericalangle ADE| = |\sphericalangle AGF| = \alpha$ .

Trójkąt  $ADE$  jest prostokątny, zatem  $\cos \alpha = \frac{|DE|}{|AD|} = \frac{h}{x}$  i  $\sin \alpha = \frac{|AE|}{|AD|}$ . Stąd  $|DE| = h = x \cos \alpha$

i  $|AE| = x \sin \alpha$ .

Zapisujemy pole trapezu  $ABCD$  na dwa sposoby:

$$P_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot (|AB| + |CD|) \cdot |DE| \text{ i } P_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot |AE| \cdot |DE| + |DC| \cdot |DE| + \frac{1}{2} \cdot |HB| \cdot |CH|.$$

Otrzymujemy równanie:  $\frac{m+x}{2} \cdot x \cos \alpha = x \cdot x \cos \alpha + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot x \sin \alpha \cdot x \cos \alpha$ .

Po przekształceniach otrzymujemy  $x = \frac{m}{1 + 2 \sin \alpha}$ .

Wyznaczamy obwód trapezu  $ABCD$ :

$$O = |AB| + 3|CD| = m + 3x = m + 3 \frac{m}{1 + 2 \sin \alpha} = \frac{2m \sin \alpha + 4m}{2 \sin \alpha + 1} = \frac{2m(\sin \alpha + 2)}{2 \sin \alpha + 1}.$$

**Schemat oceniania IV sposób rozwiązania**

**Zdający otrzymuje .....1 punkt**

gdy zapisze równanie  $\frac{m+x}{2} \cdot x \cos \alpha = x \cdot x \cos \alpha + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot x \sin \alpha \cdot x \cos \alpha$ .

**Zdający otrzymuje .....2 punkty**

gdy wyznaczy obwód trapezu  $O = \frac{2m(\sin \alpha + 2)}{2 \sin \alpha + 1}$ .

### Uwagi

1. Jeżeli zdający popełni błąd rachunkowy przy wyznaczeniu  $x$  i dalej konsekwentnie obliczy obwód trapezu, to za takie rozwiązanie przyznajemy **1 punkt**.
2. Nie wymagamy postaci uporządkowanej w wyznaczonym obwodzie trapezu.

**Zadanie 28. (2 pkt)**

Przemek w czasie ferii zimowych podjął pracę w firmie „Ulotek-express”. Pierwszego dnia rozniósł 900 ulotek, każdego następnego dnia o 40 mniej niż poprzedniego. Za dostarczenie jednej ulotki firma płaci 5 groszy. Jaką kwotę zarobił Przemek w czasie 14 dni pracy?

**I sposób rozwiązania**

Wyznaczamy różnicę ciągu arytmetycznego  $r = -40$ , a następnie czternasty wyraz ciągu  $a_{14} = 900 + 13 \cdot (-40) = 380$ .

Obliczamy sumę czternastu wyrazów tego ciągu (czyli liczbę ulotek, jaką rozniósł Przemek)  $S_{14} = 8960$ .

Obliczamy jaką kwotę zarobił Przemek:  $8960 \cdot 5 \text{ groszy} = 448 \text{ zł}$ .

**II sposób rozwiązania**

Obliczamy kwotę, którą zarobił Przemek pierwszego dnia:  $900 \cdot 5 \text{ groszy} = 45 \text{ zł}$ .

Wyznaczamy różnicę ciągu arytmetycznego  $r = -40 \cdot 0,05 = -2$ , a następnie czternasty wyraz ciągu  $a_{14} = 45 + 13 \cdot (-2) = 19$ .

Obliczamy sumę czternastu wyrazów tego ciągu (czyli kwotę, jaką zarobił Przemek w czasie 14 dni pracy)  $S_{14} = 448 \text{ zł}$ .

**III sposób rozwiązania**

Wyznaczamy różnicę ciągu arytmetycznego  $r = -40$  lub  $r = -2$ , a następnie bezpośrednio sumę czternastu wyrazów tego ciągu  $S_{14} = 8960$  lub  $S_{14} = 448$ .

Zapisujemy odpowiedź: Przemek zarobił 448 zł.

**Schemat oceniania I, II i III sposobu rozwiązania**

**Zdający otrzymuje .....1 punkt**

gdy:

- zauważy, że mamy do czynienia z ciągiem arytmetycznym i wyznaczy różnicę tego ciągu i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy,

albo

- popełni błąd rachunkowy w wyznaczeniu różnicy i konsekwentnie do popełnionego błędu obliczy jaką kwotę zarobił Przemek.

**Zdający otrzymuje .....2 punkty**

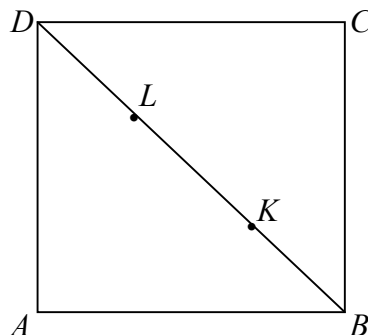
gdy obliczy kwotę jaką w czasie 14 dni pracy: 448 zł.

**Uwagi**

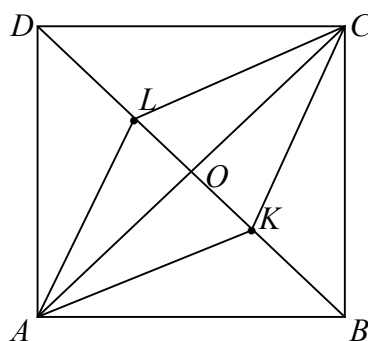
1. Jeśli zdający nie korzysta z własności ciągu, ale zapisze np.  $900 + 860 + 820 + \dots + 380$  i poprawnie obliczy zarobioną kwotę, to za takie rozwiązanie przyznajemy **2 punkty**.
2. Jeśli zdający nie korzysta z własności ciągu, ale zapisze np.  $45 + 43 + 41 + 39 + \dots + 19$  i poprawnie obliczy zarobioną kwotę, to za takie rozwiązanie przyznajemy **2 punkty**.
3. Jeśli zdający nie korzysta z własności ciągu (np. tak jak w uwadze 1 lub 2) i popełni błąd rachunkowy, to za takie rozwiązanie przyznajemy **0 punktów**.
4. Jeśli zdający zapisze poprawną odpowiedź (bez uzasadnienia) to otrzymuje **0 punktów**.

**Zadanie 29. (2 pkt)**

Dany jest kwadrat  $ABCD$ . Na przekątnej  $BD$  obrano dwa różne punkty  $K$  i  $L$ , takie że  $|BK| = |DL|$  (zobacz rysunek). Uzasadnij, że czworokąt  $AKCL$  jest rombem.



**I sposób rozwiązania**



Przekątna  $BD$  to dwusieczna kąta prostego, stąd  $|\sphericalangle ADL| = |\sphericalangle CDL| = |\sphericalangle CBK| = |\sphericalangle ABK| = 45^\circ$ .

Z założenia mamy  $|DL| = |BK|$  oraz  $|AB| = |BC| = |CD| = |DA|$ .

Trójkąty  $ADL$ ,  $CDL$ ,  $CBK$ ,  $ABK$  są przystające (cecha  $bkb$ ), stąd  $|AL| = |CL| = |CK| = |AK|$ .

Zatem czworokąt  $AKCL$  jest rombem.

**Schemat oceniania I sposobu rozwiązania**

**Zdający otrzymuje .....1 punkt**

gdy:

- zapisze, że trójkąty  $ADL$ ,  $CDL$ ,  $CBK$ ,  $ABK$  są przystające,

albo

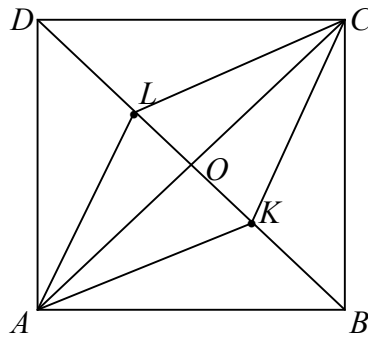
- zaznaczy na rysunku równość odpowiednich boków i kątów w czterech trójkątach  $ADL$ ,  $CDL$ ,  $CBK$ ,  $ABK$

i na tym poprzestanie lub dalej popełni błędy.

**Zdający otrzymuje .....2 punkty**

gdy uzasadni, że wszystkie boki czworokąta  $AKCL$  są równe i zapisze, że czworokąt  $AKCL$  jest rombem.

**II sposób rozwiązania**



Trójkąty  $AOL$ ,  $AOK$ ,  $COK$ ,  $COL$  są prostokątne, bo przekątne kwadratu są prostopadłe. Ponieważ  $|DL|=|KB|$ ,  $|OD|=|OB|$  i  $|LO|=|OD|-|DL|$  oraz  $|OK|=|OB|-|KB|$ , zatem  $|LO|=|OK|$ . Wiemy, że  $|AO|=|OC|$ . Trójkąty  $AOL$ ,  $AOK$ ,  $COK$ ,  $COL$  są przystające (cecha  $bkb$ ), stąd  $|AL|=|CL|=|CK|=|AK|$ . Zatem czworokąt  $AKCL$  jest rombem.

**Schemat oceniania II sposobu rozwiązania**

**Zdający otrzymuje .....1 punkt**

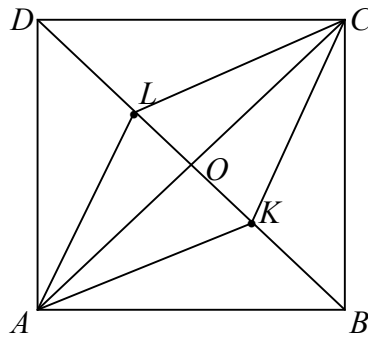
gdy:

- zapisze, że trójkąty  $AOL$ ,  $AOK$ ,  $COK$ ,  $COL$  są przystające,
- albo
- zaznaczy na rysunku równość odpowiednich boków i kątów w czterech trójkątach  $ADL$ ,  $CDL$ ,  $CBK$ ,  $ABK$

i na tym poprzestanie lub dalej popełni błędy.

**Zdający otrzymuje .....2 punkty**

gdy uzasadni, że wszystkie boki czworokąta  $AKCL$  są równe i zapisze, że czworokąt  $AKCL$  jest rombem.

**III sposób rozwiązania**

Przekątne czworokąta  $AKCL$  pokrywają się z przekątnymi kwadratu, zatem są prostopadłe. Punkt przecięcia przekątnych kwadratu  $O$ , dzieli przekątne  $AC$  i  $BD$  na połowy. Stąd  $|OD| = |OB|$  oraz  $|AO| = |OC|$ .

Z założenia mamy  $|DL| = |KB|$ .

Dodatkowo  $|LO| = |OD| - |DL|$  oraz  $|OK| = |OB| - |KB|$ , zatem  $|LO| = |OK|$ .

W czworokącie  $AKCL$  przekątne są prostopadłe i punkt ich przecięcia  $O$  dzieli je na połowy. Zatem czworokąt  $AKCL$  jest rombem.

**Schemat oceniania III sposobu rozwiązania**

**Zdający otrzymuje .....1 punkt**

gdy:

- zauważy, że przekątne czworokąta  $AKCL$  są prostopadłe i zapisze, że  $|AO| = |OC|$ ,

albo

- zauważy, że przekątne czworokąta  $AKCL$  są prostopadłe i zaznaczy na rysunku, że  $|AO| = |OC|$ ,

i na tym poprzestanie lub dalej popełni błędy.

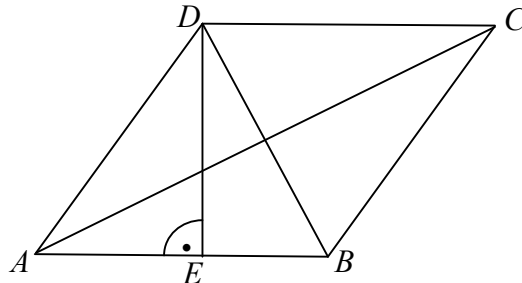
**Zdający otrzymuje .....2 punkty**

gdy uzasadni, że  $|LO| = |OK|$  oraz zapisze, że w czworokącie  $AKCL$  przekątne są prostopadłe i ich punkt przecięcia  $O$  dzieli je na połowy. Zatem czworokąt  $AKCL$  jest rombem.

**Zadanie 30. (2 pkt)**

Dany jest romb  $ABCD$  o boku długości 16 i polu powierzchni równym  $128\sqrt{3}$ . Oblicz długość dłuższej przekątnej tego rombu.

**I sposób rozwiązania**



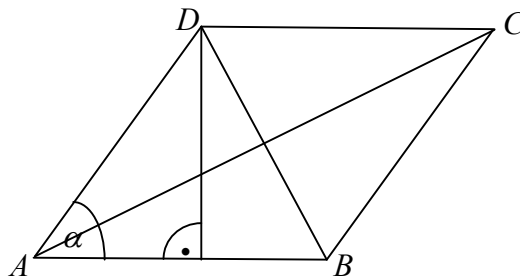
Wprowadzamy oznaczenia  $|AB|=|BC|=|CD|=|DA|=a=16$ ,  $|DE|=h$ .

Obliczamy wysokość rombu:  $h = \frac{128\sqrt{3}}{a} = \frac{128\sqrt{3}}{16} = 8\sqrt{3}$ .

Trójkąt  $AED$  jest prostokątny, więc  $|AE|^2 + h^2 = a^2$ . Stąd  $|AE|=8$ . Zatem  $|AE|=|EB|$ .  $|AB|=|AD|$  i  $|AE|=|EB|$  stąd trójkąty  $AED$  i  $EBD$  są przystające, zatem trójkąt  $ABD$  jest równoboczny.

Dłuższa przekątna rombu jest równa  $|AC|=2h=16\sqrt{3}$ .

**II sposób rozwiązania**



Zapisujemy pole rombu za pomocą wzoru  $P_{ABCD} = a^2 \cdot \sin \alpha$ , stąd  $128\sqrt{3} = 16^2 \cdot \sin \alpha$ . Zatem

$\sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$  i wtedy  $\alpha=60^\circ$ .

$|AB|=|AD|$  i  $\alpha=60^\circ$ , zatem trójkąt  $ABD$  jest równoboczny.

Dłuższa przekątna jest równa  $|AC|=2h=16\sqrt{3}$ .

**Uwaga**

Uczeń może zauważyć, że  $P_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot |BD| \cdot |AC|$ . Zatem  $\frac{1}{2} \cdot 16 \cdot |AC| = 128\sqrt{3}$ , stąd

$|AC|=16\sqrt{3}$ .



**Schemat oceniania I i II sposobu rozwiązania**

**Zdający otrzymuje .....1 punkt**

gdy:

- obliczy długość wysokości rombu  $h = 8\sqrt{3}$ ,

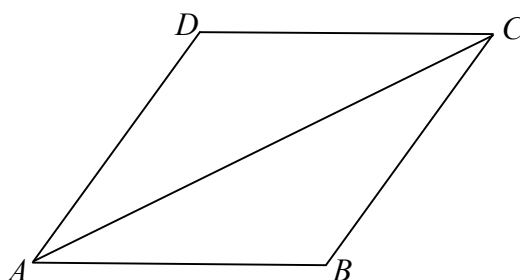
albo

- obliczy  $\sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$  i zauważy że, trójkąt  $ABD$  jest równoboczny.

**Zdający otrzymuje .....2 punkty**

gdy obliczy długość dłuższej przekątnej rombu  $|AC| = 16\sqrt{3}$ .

**III sposób rozwiązania**



Zapisujemy pole rombu korzystając ze wzoru  $P_{ABCD} = a^2 \cdot \sin \alpha$ .

Otrzymujemy równanie  $16^2 \cdot \sin \alpha = 128\sqrt{3}$ , stąd  $\sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$ . Zatem  $\alpha = 60^\circ$ .

Korzystamy z twierdzenia cosinusów i zapisujemy

$$|AC|^2 = |AB|^2 + |BC|^2 - 2 \cdot |AB| \cdot |BC| \cdot \cos 120^\circ = a^2 + a^2 - 2 \cdot a^2 \cdot \cos 120^\circ, \text{ stąd } |AC| = 16\sqrt{3}.$$

**Schemat oceniania III sposobu rozwiązania**

**Zdający otrzymuje .....1 punkt**

gdy obliczy  $\sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$  i zapisze  $|AC|^2 = a^2 + a^2 - 2 \cdot a^2 \cdot \cos 120^\circ$ .

**Zdający otrzymuje .....2 punkty**

gdy obliczy długość dłuższej przekątnej rombu  $|AC| = 16\sqrt{3}$ .

**Zadanie 31. (4 pkt)**

Julia i Dominika mają skarbonki. W skarbonce Julii znajduje się 1 banknot 50 zł, dwa banknoty 20 zł i 3 banknoty 10 zł, natomiast w skarbonce Dominiki znajdują się 2 banknoty 50 zł, 1 banknot 20 zł i 5 banknotów 10 zł. Każda z dziewcząt losuje ze swojej skarbonki jeden banknot. Jakie jest prawdopodobieństwo, że wartość wylosowanych banknotów przekroczy 38 zł? Wynik podaj w postaci ułamka nieskracalnego.

**I sposób rozwiązania** (metoda klasyczna)

Zdarzeniami elementarnymi są wszystkie pary  $(a, b)$  takie, że  $a \in \{50, 20, 20, 10, 10, 10\}$ ,  $b \in \{50, 50, 20, 10, 10, 10, 10, 10\}$ .

Obliczamy liczbę wszystkich zdarzeń elementarnych:  $|\Omega| = 6 \cdot 8 = 48$ .

Obliczamy liczbę zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu  $A$  polegającym na tym, że wartość wylosowanych banknotów przekroczy 38 zł, np. wypisując je i zliczając:

Wypisujemy wszystkie możliwe pary wyboru banknotów:

$A \in \{(50, 50), (50, 20), (50, 20), (50, 10), (50, 10), (50, 10), (50, 50), (50, 20), (50, 20), (50, 10), (50, 10), (50, 10), (20, 50), (20, 20), (20, 20), (10, 50), (10, 50), (10, 50), (10, 50), (10, 50)\}$ , czyli  $|A| = 20$ .

$$\text{Stąd } P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{20}{48} = \frac{5}{12}.$$

Uwaga

Uczeń może:

- obliczyć liczbę zdarzeń sprzyjających zdarzeniu  $A$  zapisując możliwe układy banknotów: 50 zł i 50 zł lub 50 zł i 20 zł lub 50 zł i 10 zł lub 20 zł i 50 zł lub 20 zł i 20 zł lub 10 zł i 50 zł i stąd  $|A| = 1 \cdot 2 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 5 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 = 20$ ,

albo

- obliczyć liczbę zdarzeń sprzyjających zdarzeniu przeciwnemu do zdarzenia  $A$  (wartość wylosowanych banknotów nie przekroczy 38 zł). Wystarczy zauważyć, że niemożliwe są układy: 20 zł i 10 zł lub 10 zł i 10 zł lub 10 zł i 20 zł, więc  $|A'| = 2 \cdot 5 + 3 \cdot 5 + 3 = 28$ .

$$\text{Stąd } P(A') = \frac{28}{48}. \text{ Zatem } P(A) = 1 - \frac{28}{48} = \frac{20}{48} = \frac{5}{12}$$

$$(\text{lub } |A| = |\Omega| - |A'|, \text{ stąd } |A| = 48 - 28 = 20. \text{ Zatem } P(A) = \frac{20}{48} = \frac{5}{12}).$$

**Schemat oceniania I sposobu rozwiązania**

**Rozwiązanie, w którym postęp jest wprowadzić niewielki, ale konieczny na drodze do całkowitego rozwiązania zadania..... 1 punkt**

- uczeń zapisze, że  $|\Omega| = 6 \cdot 8$  i na tym poprzestanie lub dalej rozwiązuje błędnie,

albo

- uczeń pokaże metodę zliczania zdarzeń sprzyjających zdarzeniu  $A$  lub zdarzeniu  $A'$  i na tym poprzestanie lub dalej rozwiązuje błędnie,

albo

- uczeń wypisze wszystkie zdarzenia sprzyjające zdarzeniu  $A$  lub  $A'$  i na tym poprzestanie lub dalej rozwiązuje błędnie.

**Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp.....2 punkty**

- uczeń zapisze, że  $|\Omega| = 48$  i pokaże metodę zliczania zdarzeń sprzyjających zdarzeniu  $A$  lub zdarzeniu  $A'$ , np.:  $|A| = 1 \cdot 2 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 5 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 2$  lub  $|A'| = 2 \cdot 5 + 3 \cdot 5 + 3 \cdot 1$  i na tym poprzestanie lub dalej rozwiązuje błędnie,

albo

- uczeń zapisze, że  $|\Omega| = 48$  i wypisze wszystkie zdarzenia sprzyjające zdarzeniu  $A$  lub  $A'$  i na tym poprzestanie lub dalej rozwiązuje błędnie.

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania .....3 punkty**

- uczeń obliczy liczbę zdarzeń sprzyjających zdarzeniu  $|A| = 20$  i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy,

albo

- uczeń obliczy liczbę zdarzeń sprzyjających zdarzeniu  $|A'| = 28$  i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

**Rozwiązanie pełne .....4 punkty**

Obliczenie prawdopodobieństwa zdarzenia  $A$  i zapisanie wyniku w postaci ułamka nieskracalnego  $P(A) = \frac{5}{12}$ .

**II sposób rozwiązania** (metoda tabeli)

Zdarzeniami elementarnymi są wszystkie pary  $(a, b)$  takie, że  $a \in \{50, 20, 20, 10, 10, 10\}$ ,  $b \in \{50, 50, 20, 10, 10, 10, 10\}$ .

Tworzymy tabelę ilustrującą sytuacją opisaną w zadaniu, np.:

	50zł	20 zł	20 zł	10 zł	10 zł	10 zł
50 zł	x	x	x	x	x	x
50 zł	x	x	x	x	x	x
20 zł	x	x	x			
10 zł	x					
10 zł	x					
10 zł	x					
10 zł	x					
10 zł	x					

Obliczamy liczbę wszystkich zdarzeń elementarnych:  $|\Omega| = 6 \cdot 8 = 48$ .

Zliczamy oznaczone krzyżykami zdarzenia elementarne sprzyjające zdarzeniu  $A$ :  $|A| = 20$ .

Obliczamy prawdopodobieństwo zdarzenia  $A$ :  $P(A) = \frac{20}{48} = \frac{5}{12}$ .

**Uwaga**

Uczeń może oznaczyć w tabeli zdarzenia elementarne sprzyjające zdarzeniu przeciwnemu do zdarzenia  $A$ .

**Schemat oceniania II sposobu rozwiązania**

**Rozwiązanie, w którym postęp jest wprawdzie niewielki, ale konieczny na drodze do całkowitego rozwiązania zadania..... 1 punkt**

Zdający sporządzi tabelkę przedstawiającą sytuację w zadaniu, np.:

	50zł	20 zł	20 zł	10 zł	10 zł	10 zł
50 zł						
50 zł						
20 zł						
10 zł						
10 zł						
10 zł						
10 zł						
10 zł						

**Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp.....2 punkty**

- uczeń obliczy liczbę wszystkich zdarzeń elementarnych  $|\Omega| = 48$  i zaznaczy w tabeli zdarzenia sprzyjające zajściu zdarzeniu  $A$  i na tym poprzestanie lub dalej rozwiązuje błędnie,

albo

- uczeń obliczy liczbę wszystkich zdarzeń elementarnych  $|\Omega| = 48$  i zaznaczy w tabeli zdarzenia sprzyjające zajściu zdarzeniu  $A'$  i na tym poprzestanie lub dalej rozwiązuje błędnie.

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania .....3 punkty**

- uczeń zliczy liczbę zdarzeń sprzyjających zdarzeniu  $|A| = 20$  i na tym zakończy lub dalej rozwiązuje błędnie,

albo

- uczeń zliczy liczbę zdarzeń sprzyjających zdarzeniu  $|A'| = 28$  i na tym zakończy lub dalej rozwiązuje błędnie.

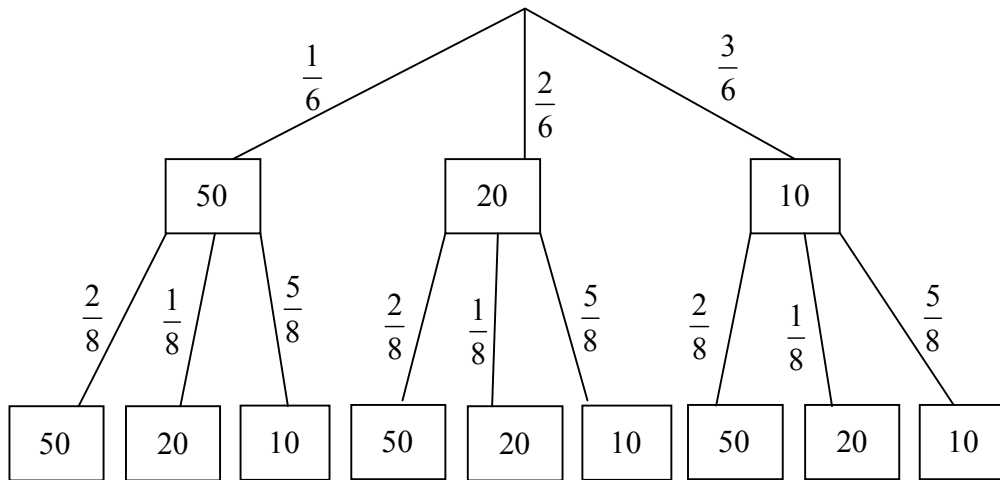
**Rozwiązanie pełne .....4 punkty**

Obliczenie prawdopodobieństwa zdarzenia  $A$  i zapisanie wyniku w postaci ułamka

nieskracalnego  $P(A) = \frac{5}{12}$ .

**III sposób rozwiązania** (metoda drzewa)

Rysujemy drzewo uwzględniając tylko istotne gałęzie i zapisujemy na nich prawdopodobieństwo.



Obliczamy prawdopodobieństwo zdarzenia  $A$ :

$$P(A) = \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{8} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{8} + \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{8} + \frac{2}{6} \cdot \frac{2}{8} + \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{8} + \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{8} = \frac{2+1+5+4+2+6}{6 \cdot 8} = \frac{20}{48} = \frac{5}{12}$$

**Schemat oceniania III sposobu rozwiązania**

**Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp**.....**2 punkty**

Uczeń narysuje drzewo uwzględniającego tylko istotne gałęzie i zapisze na nich prawdopodobieństwo.

**Uwaga**

Jeżeli zdający narysuje drzewo uwzględniające tylko istotne gałęzie i nie zapisze na nich prawdopodobieństwa, to za takie rozwiązanie przyznajemy **0 punktów**.

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania** .....**3 punkty**

Uczeń zapisze  $P(A) = \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{8} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{8} + \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{8} + \frac{2}{6} \cdot \frac{2}{8} + \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{8} + \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{8}$  i nie poda wyniku w postaci ułamka nieskracalnego.

**Rozwiązanie pełne** .....**4 punkty**

Obliczenie prawdopodobieństwa zdarzenia  $A$ :  $P(A) = \frac{5}{12}$ .

**Uwagi**

1. Jeśli zdający rozwiąże zadanie do końca i otrzyma  $P(A) > 1$ , to za takie rozwiązanie przyznajemy **0 punktów**.
2. Jeżeli zdający obliczy prawdopodobieństwo zdarzenia metodą drzewa i otrzymany wynik podzieli przez 48, to za takie rozwiązanie przyznajemy **0 punktów**.
3. Jeżeli zdający opuści w rozwiązaniu niektóre gałęzie i konsekwentnie obliczy prawdopodobieństwo, to za takie rozwiązanie przyznajemy **1 punkt**.
4. Jeżeli zdający poprawnie obliczy prawdopodobieństwo i błędnie skróci ułamek, np.:

$$P(A) = \frac{20}{48} = \frac{5}{6}, \text{ to za takie rozwiązanie przyznajemy } \mathbf{3 \text{ punkty}}.$$

**Zadanie 32. (5 pkt)**

Punkty o współrzędnych  $A = (-2, -8)$ ,  $B = (2, 4)$ ,  $C = (-2, 2)$  są wierzchołkami trapezu. Ramię trapezu  $AD$  jest prostopadłe do podstaw  $AB$  i  $CD$ . Oblicz współrzędne punktu  $D$  oraz pole powierzchni tego trapezu.

**I sposób rozwiązania**

Obliczamy współczynnik kierunkowy prostej  $AB$  lub wyznaczamy równanie prostej  $AB$ :

$$a = \frac{4+8}{2+2} = \frac{12}{4} = 3, \text{ stąd } y = 3(x+2) - 8. \text{ Zatem } y = 3x - 2.$$

Wyznaczamy równanie prostej równoległej do prostej  $AB$ , przechodzącej przez punkt  $C$ :

$$y = 3(x+2) + 2, \text{ stąd } y = 3x + 8.$$

Wyznaczamy równanie prostej prostopadłej do prostej  $AB$  i przechodzącej przez punkt  $A$ :

Współczynnik kierunkowy prostej  $AB$  jest równy 3, stąd współczynnik kierunkowy prostej

$$AD \text{ jest równy } -\frac{1}{3}. \text{ Zatem prosta } AD \text{ ma równanie } y = -\frac{1}{3}x - \frac{26}{3}.$$

$$\text{Obliczamy współrzędne punktu } D \text{ rozwiązując układ równań } \begin{cases} y = 3x + 8 \\ y = -\frac{1}{3}x - \frac{26}{3} \end{cases}$$

Punkt  $D$  ma współrzędne  $D = (-5, -7)$ .

Obliczamy długości podstaw i wysokość trapezu:

$$|AB| = \sqrt{160} = 4\sqrt{10}, \quad |CD| = \sqrt{90} = 3\sqrt{10} \quad \text{ i } \quad |AD| = \sqrt{10}.$$

$$\text{Obliczamy pole trapezu: } P = \frac{1}{2} \cdot (4\sqrt{10} + 3\sqrt{10}) \cdot \sqrt{10} = 35.$$

**Schemat oceniania I sposobu rozwiązania**

**Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania ..... 1 pkt**

- Wyznaczenie równania prostej  $AB$ :  $y = 3x - 2$ .

albo

- Wyznaczenie współczynnika kierunkowego prostej  $AB$ :  $a = 3$ .

**Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp ..... 2 pkt**

Wyznaczenie równania prostej równoległej do prostej  $AB$ :  $y = 3x + 8$  i równania prostej

$$\text{prostopadłej do prostej } AB \text{ przechodzącej przez punkt } A: y = -\frac{1}{3}x - \frac{26}{3}.$$

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania ..... 3 pkt**

Wyznaczenie współrzędnych punktu  $D = (-5, -7)$  oraz obliczenie jednej z wielkości:

- długości podstawy trapezu  $|AB| = \sqrt{160} = 4\sqrt{10}$ ,

albo

- długości podstawy trapezu  $|CD| = \sqrt{90} = 3\sqrt{10}$ ,

albo

- wysokości trapezu  $|AD| = \sqrt{10}$ .

**Rozwiązanie prawie całkowite ..... 4 pkt**

Obliczenie pozostałych dwóch wielkości niezbędnych do obliczenia pola trapezu:

- długości podstawy trapezu  $|CD| = \sqrt{90} = 3\sqrt{10}$  i wysokości trapezu  $|AD| = \sqrt{10}$ .

albo

- długości podstawy trapezu  $|AB| = \sqrt{160} = 4\sqrt{10}$  i wysokości trapezu  $|AD| = \sqrt{10}$ .

albo

- długości podstaw trapezu  $|AB| = \sqrt{160} = 4\sqrt{10}$  i  $|CD| = \sqrt{90} = 3\sqrt{10}$ .

**Rozwiązanie pełne ..... 5 pkt**

Obliczenie pola trapezu:  $P = 35$ .

**Uwaga**

Jeżeli zdający przy obliczaniu współrzędnych punktu  $D$  lub przy obliczaniu długości podstawy  $AB$  lub długości podstawy i lub długości wysokości trapezu popełnił błąd nieprzekreślający poprawności rozwiązania np. błąd rachunkowy i z tym błędem poprawnie obliczył pole trapezu, to za takie rozwiązanie przyznajemy **4punkty**.

**II sposób rozwiązania**

Obliczamy współczynnik kierunkowy prostej  $AB$  lub wyznaczamy równanie prostej  $AB$ :

$$a = \frac{4+8}{2+2} = \frac{12}{4} = 3, \text{ stąd } y = 3(x+2) - 8. \text{ Zatem } y = 3x - 2.$$

Wyznaczamy równanie prostej prostopadłej do prostej  $AB$ , przechodzącej przez punkt  $C$ :

$$y = -\frac{1}{3}(x+2) + 2, \text{ stąd } y = -\frac{1}{3}x + \frac{4}{3}.$$

Prosta prostopadła do  $AB$  i przechodząca przez punkt  $C$  przecina prostą  $AB$  w punkcie  $E$ .

$$\text{Obliczamy współrzędne punktu } E \text{ rozwiązując układ równań } \begin{cases} y = 3x - 2 \\ y = -\frac{1}{3}x + \frac{4}{3} \end{cases}$$

Punkt  $E$  ma współrzędne punktu wynoszą  $E = (1, 1)$ .

Obliczamy wysokość trapezu  $CE$ :  $|CE| = \sqrt{9+1} = \sqrt{10}$ .

Obliczamy długości podstaw trapezu:

$$|AB| = \sqrt{160} = 4\sqrt{10} \text{ i } |CD| = |AE| \text{ lub } |CD| = |AB| - |EB| \text{ (bo trapez jest prostokątny).}$$

$$\text{Zatem } |CD| = |AE| = \sqrt{9+81} = \sqrt{90} = 3\sqrt{10} \text{ lub } |CD| = 4\sqrt{10} - \sqrt{10} = 3\sqrt{10}.$$

$$\text{Obliczamy pole trapezu: } P = \frac{1}{2} \cdot (4\sqrt{10} + 3\sqrt{10}) \cdot \sqrt{10} = 35.$$

Obliczamy współrzędne punktu  $D$  (porównując wektory  $\vec{EC} = \vec{AD}$ ). Stąd  $[-3, 1] = [x_D + 2, y_D + 8]$ . Zatem  $x_D + 2 = -3$  i  $y_D + 8 = 1$ , czyli  $D = (-5, -7)$ .

Uwaga

Współrzędne punktu  $D$  możemy obliczyć jak poniżej:

Wyznaczamy równanie prostej równoległej do prostej  $CE$  i przechodzącej przez punkt  $A$ :

$$y = -\frac{1}{3}(x+2) - 8. \text{ Stąd współrzędne punktu } D = \left(x_D, -\frac{1}{3}x_D - \frac{26}{3}\right).$$

$$|AD| = |CE| \text{ więc } \sqrt{(x_D+2)^2 + \left(-\frac{1}{3}x_D - \frac{26}{3}\right)^2} = \sqrt{10}, \text{ stąd } (x_D+2)^2 + \frac{1}{9}(x_D+2)^2 = 10$$

Otrzymujemy równanie  $(x_D+2)^2 = 9$ , które rozwiązaniem są  $x_D = -5$  i  $x_D = 1$ .

Obliczamy drugą współrzędną punktu  $D$ :  $y_D = -7$  i  $y_D = -9$ .

Druga para nie spełnia warunków zadania, więc punkt  $D$  ma współrzędne:  $D = (-5, -7)$ .

**Schemat oceniania II sposobu rozwiązania**

**Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania ..... 1 pkt**

- Wyznaczenie równania prostej  $AB$ :  $y = 3x - 2$ .

albo

- Wyznaczenie współczynnika kierunkowego prostej  $AB$ :  $a = 3$ .

**Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp ..... 2 pkt**

Wyznaczenie równania prostej prostopadłej do prostej  $AB$ , przechodzącej przez punkt  $C$ :

$$y = -\frac{1}{3}x - \frac{26}{3} \text{ i wyznaczenie współrzędnych punktu } E = (1, 1).$$

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania ..... 3 pkt**

Wyznaczenie współrzędnych punktu  $D = (-5, -7)$  oraz obliczenie jednej z wielkości:

- długości podstawy trapezu  $|AB| = \sqrt{160} = 4\sqrt{10}$ ,

albo

- długości podstawy trapezu  $|CD| = \sqrt{90} = 3\sqrt{10}$ ,

albo

- wysokości trapezu  $|AD| = \sqrt{10}$ .

**Rozwiązanie prawie całkowite ..... 4 pkt**

Obliczenie pozostałych dwóch wielkości niezbędnych do obliczenia pola trapezu:

- długości podstawy trapezu  $|CD| = \sqrt{90} = 3\sqrt{10}$  i wysokości trapezu  $|AD| = \sqrt{10}$ .

albo

- długości podstawy trapezu  $|AB| = \sqrt{160} = 4\sqrt{10}$  i wysokości trapezu  $|AD| = \sqrt{10}$ .

albo

- długości podstaw trapezu  $|AB| = \sqrt{160} = 4\sqrt{10}$  i  $|CD| = \sqrt{90} = 3\sqrt{10}$ .

**Rozwiązanie pełne ..... 5 pkt**

Obliczenie pola trapezu:  $P = 35$ .



**Uwaga**

Jeżeli zdający przy obliczaniu współrzędnych punktu  $D$  lub przy obliczaniu długości podstawy  $AB$  lub długości podstawy i lub długości wysokości trapezu popełnił błąd nieprzekreślający poprawności rozwiązania np. błąd rachunkowy i z tym błędem poprawnie obliczył pole trapezu, to za takie rozwiązanie przyznajemy **4punkty**.

**III sposób rozwiązania**

Wyznaczamy równanie prostej  $AB$ :

$$a = \frac{4+8}{2+2} = \frac{12}{4} = 3, \text{ stąd } y = 3(x+2) - 8. \text{ Zatem } 3x - y - 2 = 0.$$

Obliczamy wysokość trapezu (wyznaczamy odległość punktu  $C$  od prostej  $AB$ ):

$$h = \frac{|-6 - 2 - 2|}{\sqrt{9+1}} = \frac{|-10|}{\sqrt{10}} = \sqrt{10}$$

Wektor prostopadły do prostej  $AB$  ma współrzędne:  $\vec{u} = [3t, -t]$ , gdzie  $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ .

Zatem  $h = |\vec{u}| = \sqrt{9t^2 + t^2} = |t| \cdot \sqrt{10}$  i  $|t| \cdot \sqrt{10} = \sqrt{10}$ , stąd  $t = 1$  lub  $t = -1$ .

Prosta  $AD$  na równanie:  $\begin{cases} x = -2 + 3t \\ y = -8 - t \end{cases}$ .

Otrzymujemy:  $x_D = -5$  i  $y_D = -7$  lub  $x_D = 1$  i  $y_D = -9$ .

Druga para nie spełnia warunków zadania, więc punkt  $D$  ma współrzędne:  $D = (-5, -7)$ .

Obliczamy długości podstaw trapezu:  $|AB| = \sqrt{160} = 4\sqrt{10}$  i  $|CD| = \sqrt{90} = 3\sqrt{10}$ .

Obliczamy pole trapezu:  $P = \frac{1}{2} \cdot (4\sqrt{10} + 3\sqrt{10}) \cdot \sqrt{10} = 35$ .

**Schemat oceniania III sposobu rozwiązania**

**Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania ..... 1 pkt**

Wyznaczenie równania prostej  $AB$ :  $3x - y - 2 = 0$ .

**Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp ..... 2 pkt**

Obliczenie wysokości trapezu:  $h = \sqrt{10}$  oraz zapisanie współrzędnych wektora prostopadłego do prostej  $AB$  w zależności od parametru  $t$ : np.  $\vec{u} = [3t, -t]$ , gdzie  $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  oraz obliczenie wartości  $t$ , dla których długość wektora  $\vec{u}$  jest równa długości wysokości trapezu.

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania ..... 3 pkt**

Wyznaczenie współrzędnych punktu  $D = (-5, -7)$  oraz obliczenie długości jednej z podstaw trapezu:  $|AB| = \sqrt{160} = 4\sqrt{10}$  albo  $|CD| = \sqrt{90} = 3\sqrt{10}$ .

**Rozwiązanie prawie całkowite ..... 4 pkt**

Obliczenie długości drugiej podstawy trapezu:  $|CD| = \sqrt{90} = 3\sqrt{10}$  albo  $|AB| = \sqrt{160} = 4\sqrt{10}$ .

**Rozwiązanie pełne** ..... **5 pkt**

Obliczenie pola trapezu:  $P = 35$ .

**Uwaga**

Jeżeli zdający przy obliczaniu współrzędnych punktu  $D$  lub przy obliczaniu długości podstawy  $AB$  lub długości podstawy  $i$  lub długości wysokości trapezu popełnił błąd nieprzekreślający poprawności rozwiązania np. błąd rachunkowy i z tym błędem poprawnie obliczył pole trapezu, to za takie rozwiązanie przyznajemy **4punkty**.

**Zadanie 33. (5 pkt)**

Szkoła zakupiła na raty serwer za kwotę 5400 zł. Będzie go spłacała w równych miesięcznych ratach. Gdyby okres spłaty skrócić o pół roku, wówczas kwota raty wzrosłaby o 75 zł. Jaka była miesięczna wysokość raty i przez jaki okres szkoła spłacała swoje zobowiązania finansowe?

**I sposób rozwiązania**

Niech  $x$  oznacza liczbę miesięcy spłacania zobowiązania i niech  $y$  oznacza wysokość miesięcznej raty.

Zapisujemy układ: 
$$\begin{cases} x \cdot y = 5400 \\ (x - 6) \cdot (y + 75) = 5400 \end{cases}$$

Z pierwszego równania wyznaczamy  $y = \frac{5400}{x}$  albo  $x = \frac{5400}{y}$ .

Podstawiamy do drugiego równania i otrzymujemy równanie z jedną niewiadomą, np.:

$$(x - 6) \left( \frac{5400}{x} + 75 \right) = 5400 \quad \text{albo} \quad \left( \frac{5400}{y} - 6 \right) (y + 75) = 5400.$$

Przekształcamy to równanie do równania kwadratowego, np.:

$$75x^2 - 450x - 32400 = 0 \quad \text{lub} \quad x^2 - 6x - 432 = 0$$

albo

$$-6y^2 - 450y + 405000 = 0 \quad \text{lub} \quad -y^2 - 75y + 67500 = 0$$

Rozwiązujemy równanie kwadratowe:

$$75x^2 - 450x - 32400 = 0$$

$$\Delta = 202500 + 972000 = 9922500$$

$$\sqrt{\Delta} = 3150$$

$$x_1 = \frac{450 - 3150}{150} < 0 \quad \text{lub} \quad x_2 = \frac{450 + 3150}{150} = 24$$

$$x^2 - 6x - 432 = 0$$

$$\Delta = 36 + 1728 = 1764$$

lub  $\sqrt{\Delta} = 42$

$$x_1 = \frac{6 - 42}{2} < 0 \quad \text{lub} \quad x_2 = \frac{6 + 42}{2} = 24$$

albo

$$-6y^2 - 450y + 405000 = 0$$

$$\Delta = 202500 + 972000 = 9922500$$

$$\sqrt{\Delta} = 3150$$

$$y_1 = \frac{450 - 3150}{-12} = 225 \quad \text{lub} \quad y_2 = \frac{450 + 3150}{-12} < 0$$

$$-y^2 - 75y + 67500 = 0$$

$$\Delta = 5625 + 270000 = 275625$$

lub  $\sqrt{\Delta} = 525$

$$y_1 = \frac{75 - 525}{-2} = 225 \quad \text{lub} \quad y_2 = \frac{75 + 525}{-2} < 0$$

Odrzucamy rozwiązanie nie spełniające warunków zadania i zapisujemy, że  $x = 24$  i  $y = 225$ .

Odp.: Wysokość miesięcznej raty wynosiła 225 zł, a szkoła spłacała swoje zobowiązanie przez 24 miesiące.

**II sposób rozwiązania**

Niech  $a$  oznacza liczbę lat spłacania zobowiązania i niech  $b$  oznacza wysokość rocznej spłaty.

$$\text{Zapisujemy układ: } \begin{cases} a \cdot b = 5400 \\ \left(a - \frac{1}{2}\right) \cdot (b + 900) = 5400 \end{cases}$$

Z pierwszego równania wyznaczamy  $b = \frac{5400}{a}$  albo  $a = \frac{5400}{b}$ .

Podstawiamy do drugiego równania i otrzymujemy równanie z jedną niewiadomą, np.:

$$\left(a - \frac{1}{2}\right) \left(\frac{5400}{a} + 900\right) = 5400 \quad \text{albo} \quad \left(\frac{5400}{b} - \frac{1}{2}\right) (b + 900) = 5400.$$

Przekształcamy to równanie do równania kwadratowego, np.:

$$900a^2 - 450a - 2700 = 0 \quad \text{lub} \quad 2a^2 - a - 6 = 0$$

albo

$$-\frac{1}{2}b^2 - 450b + 4860000 = 0 \quad \text{lub} \quad -b^2 - 900b + 9720000 = 0$$

Rozwiązujemy równanie kwadratowe:

$$900a^2 - 450a - 2700 = 0$$

$$\Delta = 202500 + 972000 = 9922500$$

$$\sqrt{\Delta} = 3150$$

$$a_1 = \frac{450 - 3150}{180} < 0 \quad \text{lub} \quad a_2 = \frac{450 + 3150}{180} = 2$$

$$2a^2 - a - 6 = 0$$

$$\Delta = 1 + 48 = 49$$

$$\text{lub} \quad \sqrt{\Delta} = 7$$

$$a_1 = \frac{1 - 7}{4} < 0 \quad \text{lub} \quad a_2 = \frac{1 + 7}{4} = 2$$

albo

$$-\frac{1}{2}b^2 - 450b + 4860000 = 0$$

$$\Delta = 202500 + 972000 = 9922500$$

$$\sqrt{\Delta} = 3150$$

$$b_1 = \frac{450 - 3150}{-1} = 2700 \quad \text{lub} \quad b_2 = \frac{450 + 3150}{-1} < 0$$

$$-b^2 - 900b + 9720000 = 0$$

$$\Delta = 810000 + 38880000 = 39690000$$

$$\text{lub} \quad \sqrt{\Delta} = 6300$$

$$b_1 = \frac{900 - 6300}{-2} = 2700 \quad \text{lub} \quad b_2 = \frac{900 + 6300}{-2} < 0$$

Odrzucamy rozwiązanie nie spełniające warunków zadania i zapisujemy, że  $a = 2$  i  $b = 2700$ .

Odp.: Wysokość miesięcznej raty wynosiła 225 zł, a szkoła spłacała swoje zobowiązanie przez 2 lata.

**Schemat oceniania I i II sposobu rozwiązania**

**Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania ..... 1 pkt**

- Wprowadzenie oznaczeń, np.:  $x$  – liczba miesięcy spłacania zobowiązania,  $y$  – wysokość miesięcznej raty i zapisanie związku między tymi wielkościami  $x \cdot y = 5400$ .

albo

- Wprowadzenie oznaczeń, np.:  $x$  – liczba miesięcy spłacania zobowiązania,  $y$  – wysokość miesięcznej raty i zapisanie związku między tymi wielkościami w przypadku skrócenia okresu spłaty np.:  $(x - 6) \cdot (y + 75) = 5400$ .

albo

- Wprowadzenie oznaczeń, np.:  $a$  – liczba lat spłacania zobowiązania,  $b$  – wysokość rocznej spłaty i zapisanie związku między tymi wielkościami  $a \cdot b = 5400$ .

albo

- Wprowadzenie oznaczeń, np.:  $a$  – liczba lat spłacania zobowiązania,  $b$  – wysokość rocznej spłaty i zapisanie związku między tymi wielkościami w przypadku skrócenia okresu spłaty np.:  $\left(a - \frac{1}{2}\right) \cdot (b + 900) = 5400$ .

**Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp ..... 2 pkt**

- Zapisanie układu równań z niewiadomymi  $x$  i  $y$ :

$$\begin{cases} x \cdot y = 5400 \\ (x - 6) \cdot (y + 75) = 5400 \end{cases}$$

albo

- Zapisanie układu równań z niewiadomymi  $a$  i  $b$ :

$$\begin{cases} a \cdot b = 5400 \\ \left(a - \frac{1}{2}\right) \cdot (b + 900) = 5400 \end{cases}$$

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania ..... 3 pkt**

Zapisanie równania z jedną niewiadomą  $x$  lub  $y$  albo  $a$  lub  $b$  np.:

- $(x - 6) \left(\frac{5400}{x} + 75\right) = 5400$  lub  $75x^2 - 450x - 32400 = 0$  lub  $x^2 - 6x - 432 = 0$

albo

$$\bullet \left( \frac{5400}{y} - 6 \right) (y + 75) = 5400 \quad \text{lub} \quad -6y^2 - 450y + 405000 = 0 \quad \text{lub} \\ -y^2 - 75y + 67500 = 0$$

albo

$$\bullet \left( a - \frac{1}{2} \right) \left( \frac{5400}{a} + 900 \right) = 5400 \quad \text{lub} \quad 900a^2 - 450a - 2700 = 0 \quad \text{lub} \quad 2a^2 - a - 6 = 0$$

albo

$$\bullet \left( \frac{5400}{b} - \frac{1}{2} \right) (b + 900) = 5400 \quad \text{lub} \quad -\frac{1}{2}b^2 - 450b + 4860000 = 0 \quad \text{lub} \\ -b^2 - 900b + 9720000 = 0$$

### Uwaga

Zdający nie musi zapisywać układu równań, może bezpośrednio zapisać równanie z jedną niewiadomą.

### **Rozwiązanie zadania do końca lecz z usterkami, które jednak nie przekreślają poprawności rozwiązania (np. błędy rachunkowe) ..... 4 pkt**

- rozwiązanie równania z niewiadomą  $x$  i nie obliczenie wysokości miesięcznej raty,
- albo
- rozwiązanie równania z niewiadomą  $y$  i nie obliczenie liczby miesięcy spłacania zobowiązania,
- albo
- rozwiązanie równania z niewiadomą  $a$  i nie obliczenie wysokości rocznej spłaty,
- albo
- rozwiązanie równania z niewiadomą  $b$  i nie obliczenie liczby lat spłacania zobowiązania,
- albo
- rozwiązanie równania z niewiadomą  $x$  lub  $y$  albo  $a$  lub  $b$  i konsekwentne rozwiązanie zadania do końca.

### **Rozwiązanie pełne ..... 5 pkt**

Obliczenie wysokości miesięcznej raty (225 zł) i podanie okresu spłaty (24 miesiące lub 2 lata).

### Uwagi

1. Jeżeli zdający porównuje wielkości różnych typów, to otrzymuje **0 punktów**.
2. Jeżeli zdający poda odpowiedź bez uzasadnienia, to za takie rozwiązanie przyznajemy **1 punkt**.