



**Centralna Komisja Egzaminacyjna**

# **EGZAMIN MATURALNY 2012**

## **MATEMATYKA**

### **POZIOM PODSTAWOWY**

#### **Kryteria oceniania odpowiedzi**

**SIERPIEŃ 2012**

**Zadanie 1. (0–1)**

<b>Zakres umiejętności (standardy)</b>	<b>Opis wymagań</b>	<b>Poprawna odpowiedź (1 p.)</b>
Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji	Wykonuje obliczenia procentowe; wykorzystuje własności figur podobnych.	<b>C</b>

**Zadanie 2. (0–1)**

Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji	Stosuje prawa działań na potęgach o wykładnikach wymiernych; oblicza potęgi o wykładniku wymiernym.	<b>C</b>
---	---	----------

**Zadanie 3. (0–1)**

Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji	Oblicza wartości logarytmu.	<b>D</b>
---	-----------------------------	----------

**Zadanie 4. (0–1)**

Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji	Wykonuje obliczenia z wykorzystaniem wzorów skróconego mnożenia.	<b>D</b>
---	--	----------

**Zadanie 5. (0–1)**

Wykorzystanie i tworzenie informacji	Wyznacza wzór funkcji liniowej.	<b>B</b>
--------------------------------------	---------------------------------	----------

**Zadanie 6. (0–1)**

Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji	Wykorzystuje pojęcia wartości bezwzględnej i jej interpretacje geometryczną; zaznacza na osi liczbowej zbiory opisane nierównością.	<b>A</b>
---	---	----------

**Zadanie 7. (0–1)**

Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji	Wyznacza pierwszą współrzędną wierzchołka paraboli.	<b>B</b>
---	---	----------

**Zadanie 8. (0–1)**

Wykorzystanie i tworzenie informacji	Odczytuje z wykresu zbiór wartości funkcji.	<b>B</b>
--------------------------------------	---	----------

**Zadanie 9. (0–1)**

Wykorzystanie i tworzenie informacji	Rozwiązuje nierówności kwadratowe; zapisuje rozwiązanie w postaci przedziałów liczbowych.	<b>A</b>
--------------------------------------	---	----------

**Zadanie 10. (0–1)**

Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji	Rozkłada wielomian na czynniki stosując grupowanie wyrazów.	<b>B</b>
---	---	----------

**Zadanie 11. (0–1)**

Wykorzystanie i tworzenie informacji	Rozwiązuje proste równanie wymierne.	<b>B</b>
--------------------------------------	--------------------------------------	----------

**Zadanie 12. (0–1)**

Wykorzystanie i tworzenie informacji	Wyznacza wyraz ciągu określonego wzorem ogólnym.	<b>D</b>
--------------------------------------	--	----------

**Zadanie 13. (0–1)**

Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji	Wyznacza $n$ -ty wyraz ciągu geometrycznego.	<b>C</b>
---	--	----------

**Zadanie 14. (0–1)**

Wykorzystanie i tworzenie informacji	Znając wartość jednej funkcji trygonometrycznej wyznacza wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych.	<b>C</b>
--------------------------------------	---	----------

**Zadanie 15. (0–1)**

Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji	Wykorzystuje definicje funkcji trygonometrycznych i wyznacza wartości funkcji trygonometrycznych dla kątów ostrych.	<b>A</b>
---	---	----------

**Zadanie 16. (0–1)**

Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji	Znajduje i wykorzystuje związki miarowe w figurach płaskich.	<b>B</b>
---	--	----------

**Zadanie 17. (0–1)**

Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji	Wykorzystuje związki między kątem wpisanym i środkowym do obliczenia miary kąta.	<b>C</b>
---	--	----------

**Zadanie 18. (0–1)**

Wykorzystanie i tworzenie informacji	Znajduje i wykorzystuje związki miarowe w figurach płaskich; wyznacza promień okręgu wpisanego w trójkąt równoboczny mając daną długość boku trójkąta.	<b>C</b>
--------------------------------------	--	----------

**Zadanie 19. (0–1)**

Wykorzystanie i tworzenie informacji	Wskazuje równania prostej prostopadłej do danej.	<b>A</b>
--------------------------------------	--	----------

**Zadanie 20. (0–1)**

Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji	Oblicza odległość punktów w układzie współrzędnych; oblicza pole kwadratu.	<b>B</b>
---	--	----------

**Zadanie 21. (0–1)**

Wykorzystanie i tworzenie informacji	Posługuje się postacią równania okręgu; z zapisu równania okręgu odczytuje współrzędne jego środka.	<b>D</b>
--------------------------------------	---	----------

**Zadanie 22. (0–1)**

Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji	Wyznacza związki miarowe w wielościanach; wykorzystuje związek między polem powierzchni całkowitej sześcianu a jego objętością.	<b>C</b>
---	---	----------

**Zadanie 23. (0–1)**

Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji	Wyznacza związki miarowe w bryłach obrotowych; na podstawie danych przekroju osiowego stożka oblicza jego objętość.	<b>D</b>
---	---	----------

**Zadanie 24. (0–1)**

Wykorzystanie i tworzenie informacji	Oblicza medianę podanych danych liczbowych.	<b>B</b>
--------------------------------------	---	----------

**Zadanie 25. (0–1)**

Wykorzystanie i tworzenie informacji	Stosuje definicję prawdopodobieństwa; oblicza prawdopodobieństwo zdarzeń.	<b>B</b>
--------------------------------------	---	----------

**Zadanie 26. (0–2)**

Rozwiąż nierówność  $x^2 - 8x + 7 \geq 0$ .

Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji	Rozwiązuje nierówność kwadratową.
---	-----------------------------------

**Zdający otrzymuje .....1 pkt**  
gdy:

- prawidłowo obliczy pierwiastki trójmianu kwadratowego  $x_1 = 1$ ,  $x_2 = 7$  i na tym poprzestanie lub dalej popełni błędy

albo

- rozłoży trójmian kwadratowy  $x^2 - 8x + 7$  na czynniki liniowe i zapisze nierówność  $(x-1)(x-7) \geq 0$  i na tym poprzestanie lub dalej popełni błędy

albo

- popełni błąd rachunkowy przy obliczaniu pierwiastków trójmianu kwadratowego i konsekwentnie do popełnionego błędu rozwiąże nierówność

albo

- doprowadzi nierówność do postaci  $|x-4| \geq 3$  (na przykład z postaci  $(x-4)^2 - 9 \geq 0$  otrzymuje  $(x-4)^2 \geq 9$ , a następnie  $|x-4| \geq 3$ ) i na tym poprzestanie lub dalej popełni błędy.

**Zdający otrzymuje .....2 pkt**  
gdy poda zbiór rozwiązań nierówności w postaci:

- $(-\infty, 1) \cup \langle 7, \infty)$

albo

- $x \leq 1$  lub  $x \geq 7$

albo

- $x \leq 1, x \geq 7$

albo

- w postaci graficznej z poprawnie zaznaczonymi końcami przedziałów.

**Uwaga:**

W związku z rozbieżnością w rozumieniu i używaniu spójników w języku potocznym i formalnym języku matematyki akceptujemy zapis, np.  $x \in (-\infty, 1)$  i  $x \in \langle 7, +\infty)$ .

**Kryteria oceniania uwzględniające specyficzne trudności w uczeniu się matematyki**

1. Jeśli zdający poprawnie obliczy pierwiastki trójmianu  $x = 7$ ,  $x = 1$  i zapisze np.  $x \in (-\infty, -1) \cup \langle 7, +\infty)$ , popełniając tym samym błąd przy przepisywaniu jednego z pierwiastków, to otrzymuje **2 punkty**.
2. Jeśli zdający pomyli porządek liczb na osi liczbowej, np. zapisze zbiór rozwiązań nierówności w postaci  $(-\infty, 7) \cup \langle 1, \infty)$ , to przyznajemy **2 punkty**.

**Zadanie 27. (0–2)**

Rozwiąż równanie  $x^3 - 6x^2 - 9x + 54 = 0$ .

Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji	Rozwiązuje równanie wielomianowe.
---	-----------------------------------

**Schemat oceniania**

**Zdający otrzymuje .....1 pkt**  
gdy:

- przedstawi lewą stronę równania w postaci iloczynu  $(x^2 - 9)(x - 6)$  lub  $(x - 3)(x + 3)(x - 6)$  i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy

albo

- sprawdzi, że liczba  $-3$  jest jednym z rozwiązań równania, podzieli wielomian  $x^3 - 6x^2 - 9x + 54$  przez dwumian  $(x + 3)$  i otrzyma  $(x^2 - 9x + 18)$  i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy

albo

- sprawdzi, że liczba  $3$  jest jednym z rozwiązań równania, podzieli wielomian  $x^3 - 6x^2 - 9x + 54$  przez dwumian  $(x - 3)$  i otrzyma  $(x^2 - 3x - 18)$  i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy

albo

- sprawdzi, że liczba  $6$  jest jednym z rozwiązań równania, podzieli wielomian  $x^3 - 6x^2 - 9x + 54$  przez dwumian  $(x - 6)$  i otrzyma  $(x^2 - 9)$  i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy

**Zdający otrzymuje .....2 pkt**  
gdy wyznaczy bezbłędnie wszystkie rozwiązania równania:  $x = -3$ ,  $x = 3$ ,  $x = 6$ .

**Zadanie 28. (0–2)**

Pierwszy wyraz ciągu arytmetycznego jest równy 3, czwarty wyraz tego ciągu jest równy 15. Oblicz sumę sześciu początkowych wyrazów tego ciągu.

Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji	Oblicza sumę $n$ początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego.
---	---

**Schemat oceniania**

**Zdający otrzymuje .....1 pkt**  
gdy:

- obliczy różnicę ciągu arytmetycznego ( $r = 4$ ) i na tym poprzestanie lub błędnie wyznaczy  $S_6$

albo

- obliczy lub zapisze poprawnie jeden z pozostałych wyrazów ciągu i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy

albo

- popełni błąd rachunkowy przy obliczaniu  $r$  i konsekwentnie do tego błędu wyznaczy  $S_6$ .

**Zdający otrzymuje .....2 pkt**  
gdy obliczy  $S_6 = 78$ .

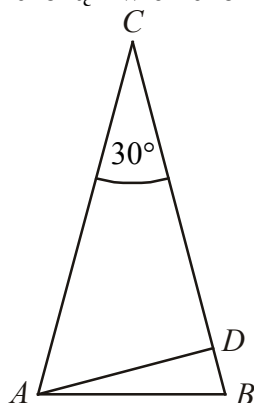
**Uwaga:**

Zdający otrzymuje **0 punktów**, jeżeli:

- błędnie zapisze związek między  $a_1$ ,  $a_4$  i  $r$ , np.  $a_1 + 4r = 15$  i konsekwentnie do tego błędu wyznaczy  $S_6$ ,
- zacytuje odpowiednie wzory, np.  $a_4 = a_1 + 3r$  lub  $S_6 = \frac{2a_1 + 5r}{2} \cdot 6$  i na tym poprzestanie.

**Zadanie 29. (0–2)**

W trójkącie równoramiennym  $ABC$  dane są  $|AC| = |BC| = 6$  i  $|\sphericalangle ACB| = 30^\circ$  (zobacz rysunek).  
Oblicz wysokość  $AD$  trójkąta opuszczoną z wierzchołka  $A$  na bok  $BC$ .



Użycie i tworzenie strategii	Znajduje związki miarowe w figurach płaskich z zastosowaniem trygonometrii.
------------------------------	---

**Schemat oceniania**

Zdający otrzymuje ..... 1 pkt

gdy zapisze zależność, z której można obliczyć wysokość  $|AD|$ , np.:

$$\sin 30^\circ = \frac{|AD|}{6} \quad \text{lub} \quad \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6 \cdot \sin 30^\circ = \frac{1}{2} \cdot |AD| \cdot 6.$$

Zdający otrzymuje ..... 2 pkt

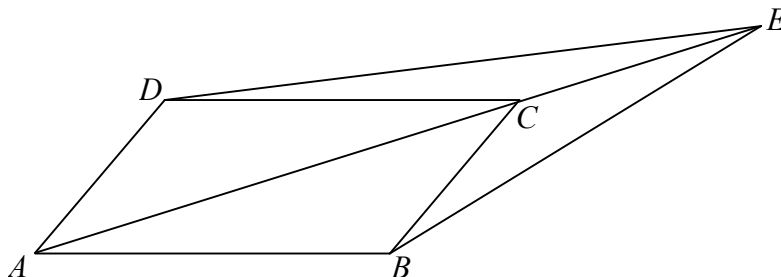
gdy obliczy wysokość opuszczoną z wierzchołka  $A$  na bok  $BC$ :  $|AD| = 3$ .

**Uwaga:**

Jeśli zdający od razu zapisze, że  $|AD| = 3$ , to otrzymuje **2 punkty**.

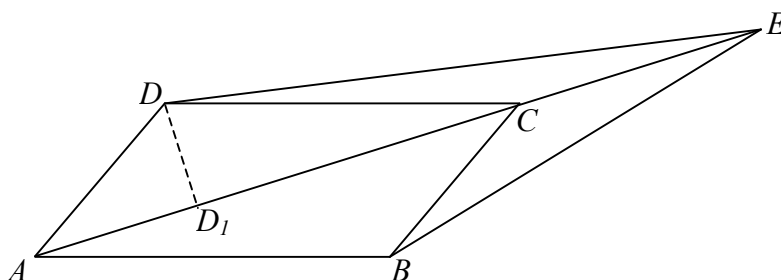
**Zadanie 30. (0–2)**

Dany jest równoległobok  $ABCD$ . Na przedłużeniu przekątnej  $AC$  wybrano punkt  $E$  tak, że  $|CE| = \frac{1}{2}|AC|$  (zobacz rysunek). Uzasadnij, że pole równoległoboku  $ABCD$  jest cztery razy większe od pola trójkąta  $DCE$ .



Rozumowanie i argumentacja	Znajduje związki miarowe w figurach płaskich; wykorzystuje związek między polami trójkątów o takiej samej wysokości.
----------------------------	--

**Rozwiązanie**



Rysujemy wysokość  $DD_1$  trójkąta  $ACD$ . Wysokość  $DD_1$  jest również wysokością trójkąta  $DCE$  o podstawie  $CE$ .

$$P_{DCE} = \frac{1}{2}|CE| \cdot |DD_1|$$

Ponieważ  $|CE| = \frac{1}{2}|AC|$ , więc  $P_{DCE} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot |AC| \cdot |DD_1| = \frac{1}{2}P_{ACD}$ .

$$P_{ABCD} = 2P_{ACD} = 4P_{DCE}$$

**Schemat oceniania**

**Zdający otrzymuje ..... 1 pkt**

gdy zapisze związek między polem trójkąta  $ACD$ , a polem trójkąta  $DCE$ , np.:  $P_{DCE} = \frac{1}{2}P_{ACD}$ .

**Zdający otrzymuje ..... 2 pkt**

gdy wykaże, że  $P_{ABCD} = 4P_{DCE}$ .



**Zadanie 31. (0–2)**

Wykaż, że jeżeli  $c < 0$ , to trójmian kwadratowy  $y = x^2 + bx + c$  ma dwa różne miejsca zerowe.

Rozumowanie i argumentacja	Bada funkcję kwadratową.
----------------------------	--------------------------

**Rozwiązanie**

Zapisujemy wyróżnik danego trójmianu kwadratowego:  $\Delta = b^2 - 4c$ .

Ponieważ  $c < 0$  to  $-4c > 0$ . Stąd  $\Delta$  jest sumą dwóch wyrażeń: nieujemnego i dodatniego, czyli jest dodatnia.

A zatem trójmian  $y = x^2 + bx + c$  ma dwa różne miejsca zerowe.

**Schemat oceniania**

**Zdający otrzymuje ..... 2 pkt**

gdy uzasadni, że trójmian ma dwa różne miejsca zerowe.

**Uwaga:**

Jeżeli zdający poda konkretną wartość w miejsce  $c$ , to otrzymuje **0 punktów**.

**Zadanie 32. (0–4)**

Dany jest trójkąt równoramienny  $ABC$ , w którym  $|AC| = |BC|$  oraz  $A = (2, 1)$  i  $C = (1, 9)$ .

Podstawa  $AB$  tego trójkąta jest zawarta w prostej  $y = \frac{1}{2}x$ . Oblicz współrzędne wierzchołka  $B$ .

Użycie i tworzenie strategii	Oblicza odległość między punktami, wyznacza środek odcinka, interpretuje współczynniki funkcji liniowej, wyznacza miejsca zerowe funkcji kwadratowej.
------------------------------	---

**I sposób rozwiązania:** (odległość)

Punkt  $B$  leży na prostej o równaniu  $y = \frac{1}{2}x$ , więc jego współrzędne można zapisać w postaci

$B = \left(x, \frac{1}{2}x\right)$ . Obliczamy odległość punktu  $C$  od punktu  $A$ :  $|AC| = \sqrt{65}$  oraz odległość

punktu  $C$  od punktu  $B$ :  $|BC| = \sqrt{(x-1)^2 + \left(\frac{x}{2}-9\right)^2}$ . Ponieważ  $|AC| = |BC|$ , więc możemy

zapisać równanie z jedną niewiadomą  $\sqrt{(x-1)^2 + \left(\frac{x}{2}-9\right)^2} = \sqrt{65}$ , skąd otrzymujemy

równanie kwadratowe  $\frac{5}{4}x^2 - 11x + 17 = 0$  lub  $5x^2 - 44x + 68 = 0$ . Równanie to ma dwa

rozwiązania  $x = \frac{34}{5}$  lub  $x = 2$ . Ponieważ drugie rozwiązanie tego równania prowadzi do punktu o współrzędnych  $(2, 1)$ , co oznacza, że otrzymujemy podany w treści zadania punkt  $A$ , zatem szukany punkt  $B = \left(\frac{34}{5}, \frac{17}{5}\right)$ .

### **Schemat oceniania I sposobu rozwiązania**

**Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania..... 1 pkt**

Obliczenie odległości  $AC$ :  $|AC| = \sqrt{65}$ .

**Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp..... 2 pkt**

• zapisanie równania  $\sqrt{(x-1)^2 + \left(\frac{x}{2}-9\right)^2} = \sqrt{65}$  lub  $(x-1)^2 + \left(\frac{x}{2}-9\right)^2 = 65$  lub  $(2y-1)^2 + (y-9)^2 = 65$

albo

• zapisanie układu równań:  $\begin{cases} y = \frac{1}{2}x \\ \sqrt{(x-1)^2 + (y-9)^2} = \sqrt{65} \end{cases}$  lub  $\begin{cases} y = \frac{1}{2}x \\ (x-1)^2 + (y-9)^2 = 65 \end{cases}$

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania..... 3 pkt**

Doprowadzenie do równania kwadratowego, np.  $\frac{5}{4}x^2 - 11x + 17 = 0$  lub  $5x^2 - 44x + 68 = 0$  lub  $5y^2 - 22y + 17 = 0$ .

**Rozwiązanie pełne..... 4 pkt**

Wyznaczenie współrzędnych wierzchołka  $B = \left(\frac{34}{5}, \frac{17}{5}\right)$ .

### **II sposób rozwiązania: (środek odcinka)**

Niech punkt  $D$  będzie spodkiem wysokości opuszczonej z wierzchołka  $C$ . Wyznaczamy równanie prostej  $CD$ :  $y = -2x + 11$ . Obliczamy współrzędne punktu  $D = \left(\frac{22}{5}, \frac{11}{5}\right)$ .

Wyznaczamy współrzędne punktu  $B$ :

• wykorzystując na przykład wzór na współrzędne środka odcinka:  $\begin{cases} \frac{x+2}{2} = \frac{22}{5} \\ \frac{y+1}{2} = \frac{11}{5} \end{cases}$

albo

• wykorzystując wzór na współrzędne środka odcinka i równanie prostej:  $\begin{cases} \frac{x+2}{2} = \frac{22}{5} \\ y = \frac{1}{2}x \end{cases}$

albo

- porównując długości odcinków  $AD$  i  $DB$ :

$$\begin{cases} \sqrt{\left(\frac{22}{5}-2\right)^2 + \left(\frac{11}{5}-1\right)^2} = \sqrt{\left(x-\frac{22}{5}\right)^2 + \left(y-\frac{11}{5}\right)^2} \\ y = \frac{1}{2}x \end{cases}$$

Otrzymujemy  $B = \left(\frac{34}{5}, \frac{17}{5}\right)$ .

### **Schemat oceniania II sposobu rozwiązania**

**Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania ..... 1 pkt**

Wyznaczenie równania prostej  $CD$ , np. w postaci  $y = -2x + 11$

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania ..... 3 pkt**

Obliczenie współrzędnych punktu  $D$ :  $D = \left(\frac{22}{5}, \frac{11}{5}\right)$ .

#### **Uwaga:**

Jeżeli zdający zapisze układ równań:  $\begin{cases} y = -2x + 11 \\ y = \frac{1}{2}x \end{cases}$  lub analogiczny i popełni błąd

rachunkowy w jego rozwiązaniu, to otrzymuje **2 punkty**.

**Rozwiązanie pełne ..... 4 pkt**

Wyznaczenie współrzędnych wierzchołka  $B = \left(\frac{34}{5}, \frac{17}{5}\right)$ .

### **III sposób rozwiązania:** (*kąt między prostymi*)

Wyznaczamy współczynnik kierunkowy prostej  $AC$ :  $a_1 = -8$ . Zapisujemy równanie:

$$\left| \frac{\frac{1}{2} + 8}{1 - 4} \right| = \left| \frac{\frac{1}{2} - a_2}{1 + \frac{1}{2}a_2} \right|, \text{ korzystając ze wzoru na tangens kąta między prostymi } AC \text{ i } BC,$$

gdzie  $a_2$  jest współczynnikiem kierunkowym prostej  $BC$ . Obliczamy  $a_2$ :  $a_2 = -\frac{28}{29}$  (drugie

rozwiązanie tego równania  $a_2 = -8$  to współczynnik kierunkowy prostej  $AC$ ). Zapisujemy

równanie prostej  $BC$ :  $y = -\frac{28}{29}(x-1) + 9$ , a następnie wyznaczamy punkt wspólny tej prostej

i prostej  $AB$  o równaniu  $y = \frac{1}{2}x$ . Rozwiązujemy układ równań:

$$\begin{cases} y = -\frac{28}{29}(x-1) + 9 \\ y = \frac{1}{2}x \end{cases}$$

Otrzymujemy współrzędne szukanego punktu:  $B = \left(\frac{34}{5}, \frac{17}{5}\right)$ .

### **Schemat oceniania III sposobu rozwiązania**

**Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp.....2 pkt**

Zapisanie równania z niewiadomym współczynnikiem kierunkowym prostej  $BC$ :

$$\left| \frac{\frac{1}{2} + 8}{1 - 4} \right| = \left| \frac{\frac{1}{2} - a_2}{1 + \frac{1}{2}a_2} \right|$$

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania.....3 pkt**

Wyznaczenie współczynnika kierunkowego prostej  $BC$ :  $a_2 = -\frac{28}{29}$ .

**Rozwiązanie pełne.....4 pkt**

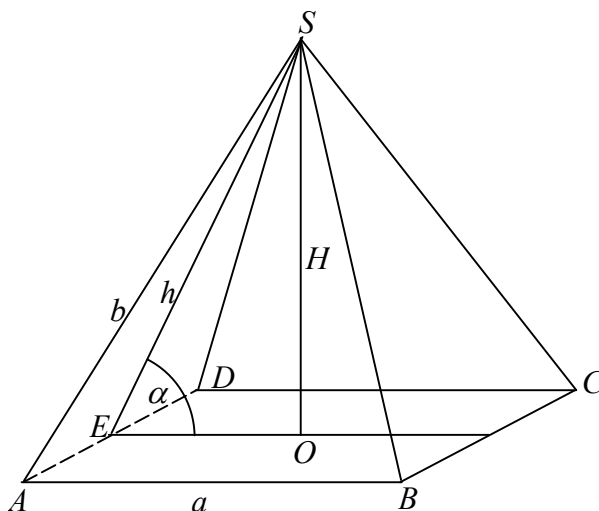
Wyznaczenie współrzędnych wierzchołka  $B = \left(\frac{34}{5}, \frac{17}{5}\right)$  jako punktu wspólnego prostych o równaniach  $y = \frac{1}{2}x$  oraz  $y = -\frac{28}{29}(x-1) + 9$ .

### **Kryteria oceniania uwzględniające specyficzne trudności w uczeniu się matematyki**

Jeśli zdający przepisze z błędem współrzędne punktów lub zamieni miejscami liczby będące współrzędnymi danych punktów i rozwiąże konsekwentnie zadanie do końca, to za takie rozwiązanie otrzymuje **4 punkty**.

**Zadanie 33. (0–4)**

W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym  $ABCD S$  o podstawie  $ABCD$  i wierzchołku  $S$  trójkąt  $ACS$  jest równoboczny i ma bok długości 8. Oblicz sinus kąta nachylenia ściany bocznej do płaszczyzny podstawy tego ostrosłupa (zobacz rysunek).



Użycie i tworzenie strategii	Wyznacza związki miarowe w wielościanach; znajduje związki miarowe w figurach płaskich, w tym stosuje własności trójkąta równobocznego i prostokątnego i wykorzystuje definicję i własności funkcji trygonometrycznych.
------------------------------	---

**I sposób rozwiązania:**

- 1) Obliczenie  $H$  (wysokości ostrosłupa), np. z własności trójkąta równobocznego  $ACS$ :

$$H = \frac{b\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}, \text{ gdzie } b = 8$$

lub z trójkąta prostokątnego  $AOS$ :  $H = \sqrt{b^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2}$

Zdający może wykonać obliczenia i zapisać wynik w przybliżeniu:  $H \approx 6,93$ .

- 2) Obliczenie  $a$  (długości krawędzi podstawy ostrosłupa), np. ze wzoru na długość przekątnej kwadratu:  $a\sqrt{2} = 8$ ,  $a = 4\sqrt{2}$  lub  $a \approx 5,66$ .

- 3) Obliczenie  $h = |SE|$  (wysokości ściany bocznej) z trójkąta prostokątnego  $SOE$ :

$$h = \sqrt{H^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2}, \quad h = 2\sqrt{14}$$

lub z trójkąta prostokątnego  $SEA$ :  $h = \sqrt{b^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2}$

Zdający może wykonać obliczenia i zapisać wynik w przybliżeniu:  $h \approx 7,48$ .

4) Obliczenie sinusa kąta  $\alpha$ :  $\sin \alpha = \frac{H}{h} = \frac{\sqrt{42}}{7}$

lub obliczenie cosinusa kąta  $\alpha$ , np. z twierdzenia cosinusów:  $h^2 = a^2 + h^2 - 2ah \cos \alpha$ ,  
 $\cos \alpha = \frac{\sqrt{7}}{7}$ , a następnie sinusa kąta  $\alpha$ , np. z jedynki trygonometrycznej:

$$\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \sqrt{1 - \frac{7}{49}} = \frac{\sqrt{42}}{7}$$

lub wykorzystanie dokonanych przybliżeń do obliczenia  $\sin \alpha \approx 0,93$ .

### **Schemat oceniania I sposobu rozwiązania**

**Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania.....1 pkt**

- obliczenie  $H$  (wysokości ostrosłupa):  $H = \frac{8\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}$  lub  $H \approx 6,93$

albo

- obliczenie  $a$  (długości krawędzi podstawy):  $a = 4\sqrt{2}$  lub  $a \approx 5,66$ .

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania.....3 pkt**

- obliczenie  $h$  (wysokości ściany bocznej ostrosłupa):  $h = 2\sqrt{14}$  lub  $h \approx 7,48$

oraz

- obliczenie  $H$  (wysokości ostrosłupa):  $H = \frac{8\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}$  lub  $H \approx 6,93$ .

**Zostały pokonane zasadnicze trudności zadania, ale w trakcie ich pokonywania zostały popełnione błędy rachunkowe, usterki .....2 pkt**

**Rozwiązanie pełne.....4 pkt**

Obliczenie sinusa kąta  $\alpha$ :  $\sin \alpha = \frac{\sqrt{42}}{7}$  lub  $\sin \alpha \approx 0,93$ .

### **II sposób rozwiązania:**

1) Obliczenie  $H$  (wysokości ostrosłupa), np. z własności trójkąta równobocznego  $ACS$

$$H = \frac{b\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}, \text{ gdzie } b = 8$$

lub z trójkąta prostokątnego  $AOS$ :  $H = \sqrt{b^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2}$

Zdający może wykonać obliczenia i zapisać wynik w przybliżeniu:  $H \approx 6,93$ .

2) Obliczenie  $a$  (długości krawędzi podstawy ostrosłupa), np. ze wzoru na długość przekątnej kwadratu  $a\sqrt{2} = 8$ ,  $a = 4\sqrt{2}$  lub  $a \approx 5,66$ .

3) Obliczenie tangensa kąta  $\alpha$ :  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{H}{\frac{a}{2}} = \frac{2H}{a} = \sqrt{6}$  lub  $\operatorname{tg} \alpha \approx 2,45$ .

4) Odczytanie wartości kąta  $\alpha$ :  $\alpha \approx 68^\circ$  i sinusa tego kąta z tablic trygonometrycznych:  
 $\sin \alpha \approx 0,93$

lub obliczenie  $\sin \alpha$  z układu równań: 
$$\begin{cases} \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \sqrt{6} \\ \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \end{cases}$$

Stąd  $\sin \alpha = \frac{\sqrt{42}}{7}$ .

### **Schemat oceniania II sposobu rozwiązania**

**Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania ..... 1 pkt**

- obliczenie  $H$  (wysokości ostrosłupa):  $H = \frac{8\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}$  lub  $H \approx 6,93$

albo

- obliczenie  $a$  (długości krawędzi podstawy):  $a = 4\sqrt{2}$  lub  $a \approx 5,66$ .

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania ..... 3 pkt**

Obliczenie tangensa kąta  $\alpha$ :  $\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{6}$  lub  $\operatorname{tg} \alpha \approx 2,45$ .

**Zostały pokonane zasadnicze trudności zadania, ale w trakcie ich pokonywania zostały popełnione błędy rachunkowe, usterki ..... 2 pkt**

**Rozwiązanie pełne ..... 4 pkt**

Obliczenie sinusa kąta  $\alpha$ :  $\sin \alpha = \frac{\sqrt{42}}{7}$  lub  $\sin \alpha \approx 0,93$ .

### **Kryteria oceniania uwzględniające specyficzne trudności w uczeniu się matematyki**

Nie obniżamy punktacji za rozwiązanie, w którym zdający poprawnie obliczył wysokość ostrosłupa, ale przy obliczaniu sinusa kąta nachylenia ściany bocznej do płaszczyzny podstawy podstawił błędną wartość.

### **Zadanie 34. (0–5)**

Kolarz pokonał trasę 114 km. Gdyby jechał ze średnią prędkością mniejszą o 9,5 km/h, to pokonałby tę trasę w czasie o 2 godziny dłuższym. Oblicz, z jaką średnią prędkością jechał ten kolarz.

Modelowanie matematyczne	Rozwiązuje zadania dotyczących sytuacji praktycznych, prowadzące do równania kwadratowego.
--------------------------	--

### **I sposób rozwiązania:**

Przyjmujemy oznaczenia, np.:  $t$  – czas pokonania całej trasy w godzinach,  $v$  – średnia prędkość w kilometrach na godzinę. Zapisujemy zależności między czasem a prędkością w obu sytuacjach opisanych w zadaniu:  $v \cdot t = 114$  oraz  $(v - 9,5) \cdot (t + 2) = 114$ .

Następnie zapisujemy układ równań 
$$\begin{cases} v \cdot t = 114 \\ (v - 9,5) \cdot (t + 2) = 114 \end{cases}$$

Rozwiązując układ równań doprowadzamy do równania z jedną niewiadomą, np.:

$$\left(\frac{114}{t} - 9,5\right) \cdot (t + 2) = 114$$

$$114 + \frac{228}{t} - 9,5 \cdot t - 19 = 114$$

Mnożymy obie strony przez  $t$ :

$$9,5t^2 + 19t - 228 = 0$$

Dzielimy obie strony przez 9,5:

$$t^2 + 2t - 24 = 0$$

$$(t + 6) \cdot (t - 4) = 0$$

$$t_1 = -6 \quad \text{lub} \quad t_2 = 4$$

$t_1$  jest sprzeczne z warunkami zadania.

Obliczamy średnią prędkość, z jaką jechał kolarz:  $v = \frac{114}{4} = 28,5$ .

## **II sposób rozwiązania:**

Zapisujemy zależności między czasem a prędkością w obu sytuacjach opisanych w zadaniu:

$$v \cdot t = 114 \quad \text{oraz} \quad (v - 9,5) \cdot (t + 2) = 114$$

Następnie zapisujemy układ równań 
$$\begin{cases} v \cdot t = 114 \\ (v - 9,5) \cdot (t + 2) = 114 \end{cases}$$

Rozwiązując układ równań doprowadzamy do równania z jedną niewiadomą, np.:

$$(v - 9,5) \cdot \left(\frac{114}{v} + 2\right) = 114$$

$$114 + 2v - \frac{1083}{v} - 19 = 114$$

Mnożymy obie strony przez  $v$

$$2v^2 - 19v - 1083 = 0$$

$$\Delta = 19^2 + 8 \cdot 1083 = 9025$$

$$\sqrt{\Delta} = 95$$

$$v_1 = \frac{19 - 95}{4} \quad v_2 = \frac{19 + 95}{4} = \frac{114}{4} = 28,5$$

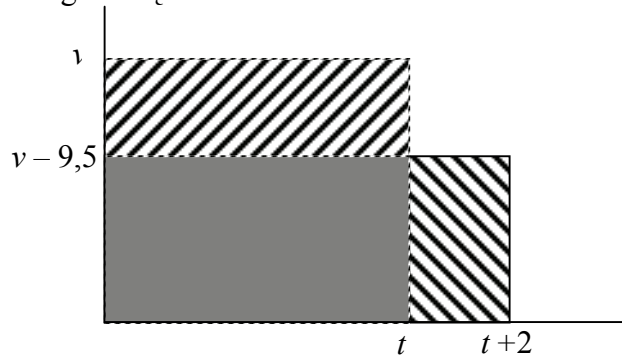
$v_1$  jest sprzeczne z warunkami zadania.

Średnia prędkość, z jaką jechał kolarz, jest równa 28,5 km/godzinę.



**III sposób rozwiązania:**

Przyjmujemy oznaczenia, np.:  $t$  – czas pokonania całej trasy w godzinach,  $v$  – średnia prędkość w kilometrach na godzinę.



Narysowane duże prostokąty reprezentują trasę przebytą przez kolarza w obu sytuacjach opisanych w zadaniu, mają zatem równe pola. Wobec tego pola zakreskowanych prostokątów są równe. Stąd równość  $9,5 \cdot t = 2(v - 9,5)$  i następnie  $9,5(t + 2) = 2v$  i  $v = 4,75(t + 2)$ .

Ponieważ trasa przebyta przez kolarza ma długość 114 km, otrzymujemy równanie:

$$4,75(t + 2) \cdot t = 114$$

$$4,75t^2 + 9,5t - 114 = 0.$$

Dzielimy obie strony przez 4,75:

$$t^2 + 2t - 24 = 0$$

$$(t + 6) \cdot (t - 4) = 0$$

$$t_1 = -6 \quad \text{lub} \quad t_2 = 4$$

$t_1$  jest sprzeczne z warunkami zadania.

Obliczamy średnią prędkość, z jaką jechał kolarz:  $v = \frac{114}{4} = 28,5$ .

Odp. Średnia prędkość, z jaką jechał kolarz, jest równa 28,5 km/godzinę.

**Schemat oceniania I, II i III sposobu rozwiązania**

**Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania ..... 1 pkt**

Zapisanie równania w sytuacji domniemanej ( $t$  oznacza czas pokonania całej trasy w godzinach, a  $v$  średnią prędkość rowerzysty w kilometrach na godzinę)

$$(t + 2) \cdot (v - 9,5) = 114$$

**Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp ..... 2 pkt**

Zapisanie układu równań z niewiadomymi  $v$  i  $t$ , np.:

$$\begin{cases} t \cdot v = 114 \\ (t + 2) \cdot (v - 9,5) = 114 \end{cases}$$

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania ..... 3 pkt**

Zapisanie równania z jedną niewiadomą  $v$  lub  $t$ , np.:

$$\left(\frac{114}{t} - 9,5\right) \cdot (t + 2) = 114 \quad \text{lub} \quad (v - 9,5) \cdot \left(\frac{114}{v} + 2\right) = 114 \quad \text{lub} \quad 4,75(t + 2) \cdot t = 114$$

Zdający nie musi zapisywać układu równań, może bezpośrednio zapisać równanie z jedną niewiadomą.

**Zostały pokonane zasadnicze trudności zadania, ale w trakcie ich pokonywania zostały popełnione błędy rachunkowe lub usterki ..... 2 pkt**

**Rozwiązanie zadania do końca lecz z usterkami, które jednak nie przekreślają poprawności rozwiązania (np. błędy rachunkowe) ..... 4 pkt**

- obliczenie czasu:  $t = 4$  lub  $t = -6$  i nie obliczenie prędkości lub obliczenie prędkości z błędem rachunkowym  
albo
- obliczenie czasu:  $t = 4$  lub  $t = -6$  i obliczenie prędkości:  $v = 28,5$  i  $v = -19$  i niewyeliminowanie prędkości niezgodnej z warunkami zadania  
albo
- obliczenie czasu z błędem rachunkowym i konsekwentne obliczenie prędkości  
albo
- rozwiązanie równania z niewiadomą  $v$  z błędem rachunkowym.

**Rozwiązanie pełne ..... 5 pkt**

Obliczenie średniej prędkości, z jaką jechał kolarz:  $v = 28,5$  km/godzinę .

**Uwagi:**

1. Jeżeli zdający porównuje wielkości różnych typów, to otrzymuje **0 punktów**.
2. Jeżeli zdający odgadnie średnią prędkość jazdy kolarza i nie uzasadni, że jest to jedyne rozwiązanie, to otrzymuje **1 punkt**.

**Kryteria oceniania uwzględniające specyficzne trudności w uczeniu się matematyki**

**Przykład 1.**

Jeśli zdający przedstawi następujące rozwiązanie:

$v$  - prędkość kolarza,  $t$  - czas pokonania całej trasy w godzinach przez kolarza

$$v - 9,5 = \frac{114}{t + 2}$$

$$\begin{cases} 114 = v \cdot t \\ 114 = (v - 9,5)t + 2 \end{cases}$$

i na tym zakończy, to takie rozwiązanie kwalifikujemy do kategorii **Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp** i przyznajemy **2 punkty**, mimo że w drugim równaniu układu zdający nie ujął wyrażenia  $t + 2$  w nawias. Zapis równania  $v - 9,5 = \frac{114}{t + 2}$  wskazuje na poprawną interpretację zależności między wielkościami.

**Przykład 2.**

Jeśli zdający przedstawi następujące rozwiązanie:

$v$  - prędkość kolarza,  $t$  - czas pokonania całej trasy w godzinach przez kolarza

$$v - 9,5 = \frac{114}{t+2} \quad \left\{ \begin{array}{l} v = \frac{114}{t} \\ v - 9,5 = \frac{210}{t+} \end{array} \right. \quad \frac{411}{t} - 9,5 = \frac{114}{t+}$$

i na tym zakończy, to takie rozwiązanie kwalifikujemy do kategorii **Pokonanie zasadniczych trudności zadania** i przyznajemy **3 punkty**, mimo że w równaniu  $\frac{411}{t} - 9,5 = \frac{114}{t+}$  zdający przestawił cyfry w zapisie liczby 114 i pominął liczbę 2 w mianowniku ułamka.

**Przykład 3.**

Jeśli zdający otrzyma inne równanie kwadratowe, np.  $2v^2 + 19v - 1083 = 0$  zamiast równania  $2v^2 - 19v - 1083 = 0$  (np. w wyniku złego przepisania znaku lub liczby), konsekwentnie jednak rozwiąże otrzymane równanie kwadratowe, odrzuci ujemne rozwiązanie i pozostawi wynik, który może być realną prędkością jazdy kolarza, to takie rozwiązanie kwalifikujemy do kategorii **Rozwiązanie pełne** i przyznajemy **5 punktów**.