

Klucz odpowiedzi do zadań zamkniętych  
oraz  
**schematy oceniania zadań otwartych**

**Matematyka**

Poziom podstawowy

**CZERWIEC 2013**

## Klucz punktowania zadań zamkniętych

Nr zad	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26
Odp.	B	C	C	B	C	C	A	A	B	B	C	A	B	A	A	A	B	D	B	C	C	C	D	C	A	C

### Schematy oceniania zadań otwartych

#### Zadania 27. (2 pkt)

Rozwiąż równanie  $3x^3 - 4x^2 - 3x + 4 = 0$ .

#### I sposób rozwiązania (metoda grupowania)

Przedstawiamy lewą stronę równania w postaci iloczynu stosując metodę grupowania wyrazów, np.:  $x^2(3x-4) - (3x-4) = 0$  lub  $3x(x^2-1) - 4(x^2-1) = 0$ , stąd  $(3x-4)(x^2-1) = 0$ .

Zatem  $x = \frac{4}{3}$  lub  $x = -1$  lub  $x = 1$ .

#### Schemat oceniania I sposobu rozwiązania

**Zdający otrzymuje ..... 1 pkt**

gdy zapisze lewą stronę równania w postaci iloczynu co najmniej dwóch wielomianów stopni dodatnich, np.:  $(x^2-1)(3x-4) = 0$  i na tym poprzestanie lub dalej popełni błąd.

**Zdający otrzymuje ..... 2 pkt**

gdy wyznaczy bezbłędnie wszystkie rozwiązania równania:  $x = \frac{4}{3}$  lub  $x = -1$  lub  $x = 1$ .

#### II sposób rozwiązania (metoda dzielenia)

- Stwierdzamy, że liczba 1 jest pierwiastkiem wielomianu  $3x^3 - 4x^2 - 3x + 4$ .  
Dzielimy wielomian  $3x^3 - 4x^2 - 3x + 4$  przez dwumian  $x-1$ . Otrzymujemy iloraz  $3x^2 - x - 4$ . Zapisujemy równanie w postaci  $(x-1)(3x^2 - x - 4) = 0$ . Obliczamy wyróżnik trójmianu  $3x^2 - x - 4$ :  $\Delta = 1 + 4 \cdot 3 \cdot 4 = 49$ . Stąd pierwiastkami trójmianu są liczby  $x_1 = \frac{1-7}{6} = -1$  oraz  $x_2 = \frac{1+7}{6} = \frac{4}{3}$ . Zatem  $x = \frac{4}{3}$  lub  $x = -1$  lub  $x = 1$ .

albo

- stwierdzamy, że liczba -1 jest pierwiastkiem wielomianu  $3x^3 - 4x^2 - 3x + 4$ . Dzielimy wielomian  $3x^3 - 4x^2 - 3x + 4$  przez dwumian  $x+1$ . Otrzymujemy iloraz  $3x^2 - 7x + 4$ . Zapisujemy równanie w postaci  $(x+1)(3x^2 - 7x + 4) = 0$ . Obliczamy wyróżnik trójmianu  $3x^2 - 7x + 4$ :  $\Delta = 49 - 4 \cdot 3 \cdot 4 = 1$ . Stąd pierwiastkami trójmianu są liczby  $x_1 = \frac{7-1}{6} = 1$  oraz  $x_2 = \frac{7+1}{6} = \frac{4}{3}$ . Zatem  $x = \frac{4}{3}$  lub  $x = -1$  lub  $x = 1$ .

albo

- stwierdzamy, że liczba  $\frac{4}{3}$  jest pierwiastkiem wielomianu  $3x^3 - 4x^2 - 3x + 4$ . Dzielimy wielomian  $3x^3 - 4x^2 - 3x + 4$  przez dwumian  $x - \frac{4}{3}$ . Otrzymujemy iloraz  $3x^2 - 3$ .

Zapisujemy równanie w postaci  $\left(x - \frac{4}{3}\right) \cdot (3x^2 - 3) = 0$  i dalej  $3\left(x - \frac{4}{3}\right)(x-1)(x+1) = 0$ .

Zatem  $x = \frac{4}{3}$  lub  $x = -1$  lub  $x = 1$ .

**Schemat oceniania II sposobu rozwiązania**

**Zdający otrzymuje ..... 1 pkt**

gdy:

- podzieli wielomian  $3x^3 - 4x^2 - 3x + 4$  przez dwumian  $x - 1$ , otrzyma iloraz  $3x^2 - x - 4$  i na tym poprzestanie lub dalej popełni błąd

albo

- podzieli wielomian  $3x^3 - 4x^2 - 3x + 4$  przez dwumian  $x + 1$ , otrzyma iloraz  $3x^2 - 7x + 4$  i na tym poprzestanie lub dalej popełni błąd

albo

- podzieli wielomian  $3x^3 - 4x^2 - 3x + 4$  przez dwumian  $x - \frac{4}{3}$ , otrzyma iloraz  $3x^2 - 3$  i na tym poprzestanie lub dalej popełni błąd

albo

- podzieli wielomian  $3x^3 - 4x^2 - 3x + 4$  przez trójmian  $x^2 - 1$ , otrzyma iloraz  $3x - 4$  i na tym poprzestanie lub dalej popełni błąd.

**Zdający otrzymuje ..... 2 pkt**

gdy wyznaczy bezbłędnie wszystkie rozwiązania równania:  $x = \frac{4}{3}$  lub  $x = -1$  lub  $x = 1$ .

Uwaga

Jeżeli zdający poda jedynie dwa pierwiastki wielomianu oraz zbiór

$\left\{\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm \frac{1}{3}, \pm \frac{2}{3}, \pm \frac{4}{3}\right\}$  wszystkich liczb wymiernych, w którym znajduje się trzeci pierwiastek wielomianu, to otrzymuje **1 punkt**.

**Zadanie 28. (2 pkt)**

Kąt  $\alpha$  jest ostry i  $\cos \alpha = \frac{\sqrt{7}}{4}$ . Oblicz wartość wyrażenia  $2 + \sin^3 \alpha + \sin \alpha \cdot \cos^2 \alpha$ .

**I sposób rozwiązania**

Ponieważ  $2 + \sin^3 \alpha + \sin \alpha \cdot \cos^2 \alpha = 2 + \sin \alpha (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) = 2 + \sin \alpha$ , więc obliczymy sinus tego kąta. Otrzymujemy zatem kolejno

$$\sin^2 \alpha = 1 - \left(\frac{\sqrt{7}}{4}\right)^2 = 1 - \frac{7}{16} = \frac{9}{16},$$

skąd wynika, że  $\sin \alpha = \frac{3}{4}$  ( $\alpha$  jest kątem ostrym). Zatem wartość tego wyrażenia równa się

$$2\frac{3}{4}.$$

**Schemat oceniania I sposobu rozwiązania**

**Zdający otrzymuje .....1 pkt**  
gdy

• zauważy, że  $\sin^3 \alpha + \sin \alpha \cdot \cos^2 \alpha = \sin \alpha$  i na tym zakończy lub dalej popełni błędy,  
albo

• obliczy wartość sinusa danego kąta  $\sin \alpha = \frac{3}{4}$  i popełni błąd w obliczeniach.

**Zdający otrzymuje .....2 pkt**

gdy zapisze, że wartość wyrażenia  $2 + \sin^3 \alpha + \sin \alpha \cdot \cos^2 \alpha$  jest równa  $2\frac{3}{4}$ .

**II sposób rozwiązania**

Ponieważ  $2 + \sin^3 \alpha + \sin \alpha \cdot \cos^2 \alpha = 2 + \sin \alpha (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) = 2 + \sin \alpha$ , więc obliczymy wartość  $\sin \alpha$ . Rysujemy trójkąt prostokątny o przeciwprostokątnej równej 4, zaś przyprostokątnych równych  $\sqrt{7}$  i  $a$  oraz zaznaczamy kąt ostry  $\alpha$  taki, że  $\cos \alpha = \frac{\sqrt{7}}{4}$ .

Z twierdzenia Pitagorasa otrzymujemy

$$a^2 + (\sqrt{7})^2 = 4^2, \text{ skąd } a = 3.$$

Zatem  $\sin \alpha = \frac{3}{4}$ , a więc wartość wyrażenia jest równa  $2\frac{3}{4}$ .

**Schemat oceniania II sposobu rozwiązania**

**Zdający otrzymuje .....1 pkt**  
gdy

• gdy narysuje trójkąt prostokątny o przeciwprostokątnej równej 4, przyprostokątnych równych  $\sqrt{7}$  oraz  $a$ , zaznaczy kąt ostry  $\alpha$  taki, że  $\cos \alpha = \frac{\sqrt{7}}{4}$ , obliczy długość drugiej przyprostokątnej  $a = 3$  i na tym zakończy lub dalej popełni błędy

albo

• zauważy, że  $\sin^3 \alpha + \sin \alpha \cdot \cos^2 \alpha = \sin \alpha$  i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

**Zdający otrzymuje .....2 pkt**

gdy zapisze, że wartość wyrażenia  $2 + \sin^3 \alpha + \sin \alpha \cdot \cos^2 \alpha$  jest równa  $2\frac{3}{4}$ .

**Zadanie 29. (2 pkt)**

Oblicz, ile jest liczb naturalnych czterocyfrowych, w których cyfra jedności jest o 3 większa od cyfry setek.

**Rozwiązanie**

W zapisie każdej z szukanych liczb na pierwszym miejscu (miejscu cyfry tysięcy) może wystąpić jedna z cyfr: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, czyli mamy 9 możliwości. Na trzecim miejscu (miejscu cyfry dziesiątek) może być jedna z liczb: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, czyli mamy 10 możliwości. Ponieważ cyfra jedności jest o 3 większa od cyfry setek, więc na miejscu

drugim (miejscu cyfry setek) może wystąpić jedna z liczb: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 i wtedy na miejscu czwartym (miejscu cyfry jedności) wystąpi odpowiednio cyfra: 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, zatem mamy 7 możliwości, w których cyfra jedności jest o 3 większa od cyfry setek. Zatem mamy  $9 \cdot 10 \cdot 7 = 630$  liczb naturalnych czterocyfrowych, w których cyfra jedności jest o 3 większa od cyfry setek.

**Schemat oceniania**

**Zdający otrzymuje .....1 pkt**  
gdy:

- wypisze wszystkie możliwości obsadzenia cyfry setek i cyfry jedności liczby czterocyfrowej, w której cyfra jedności jest o 3 większa od cyfry setek:  
 $\_0\_3$ ,  $\_1\_4$ ,  $\_2\_5$ ,  $\_3\_6$ ,  $\_4\_7$ ,  $\_5\_8$ ,  $\_6\_9$  lub zapisze, że jest 7 takich możliwości

albo

- zapisze, że cyfrę tysięcy możemy wybrać na 9 sposobów, a cyfrę dziesiątek na 10 lub wypisze te możliwości (np.  $1\_0\_$ ,  $1\_1\_$ , ...,  $1\_9\_$ ,  $2\_0\_$ ,  $2\_1\_$ , ...,  $2\_9\_$ , ...,  $9\_0\_$ ,  $9\_1\_$ ,  $9\_9\_$ ) lub obliczy, że jest 90 takich możliwości.

**Zdający otrzymuje .....2 pkt**  
gdy poprawnie obliczy, ile jest liczb naturalnych czterocyfrowych, w których cyfra jedności jest o 3 większa od cyfry setek:  $9 \cdot 10 \cdot 7 = 630$ .

**Zadanie 30. (2 pkt)**

Wykaż, że liczba  $(1 + 2013^2)(1 + 2013^4)$  jest dzielnikiem liczby  $1 + 2013 + 2013^2 + 2013^3 + 2013^4 + 2013^5 + 2013^6 + 2013^7$ .

**I sposób rozwiązania**

Zauważamy, że liczbę  $1 + 2013 + 2013^2 + 2013^3 + 2013^4 + 2013^5 + 2013^6 + 2013^7$  można zapisać w postaci, np.:

$$1 + 2013 + (1 + 2013)2013^2 + (1 + 2013)2013^4 + (1 + 2013)2013^6 = (1 + 2013)(1 + 2013^2 + 2013^4 + 2013^6).$$

Liczbę  $1 + 2013^2 + 2013^4 + 2013^6$  zapisujemy w postaci  $(1 + 2013^2)(1 + 2013^4)$ .

Zatem liczba  $(1 + 2013^2)(1 + 2013^4)$  jest dzielnikiem liczby

$$1 + 2013 + 2013^2 + 2013^3 + 2013^4 + 2013^5 + 2013^6 + 2013^7.$$

**Schemat oceniania I sposobu rozwiązania**

**Zdający otrzymuje .....1 pkt**  
gdy:

zapisze liczbę  $1 + 2013 + 2013^2 + 2013^3 + 2013^4 + 2013^5 + 2013^6 + 2013^7$  w postaci  $(1 + 2013)(1 + 2013^2 + 2013^4 + 2013^6)$  i nie zauważy, że liczbę  $(1 + 2013^2)(1 + 2013^4)$  można zapisać w postaci  $1 + 2013^2 + 2013^4 + 2013^6$ ,

**Zdający otrzymuje .....2 pkt**  
gdy przeprowadzi pełne rozumowanie.

**Uwaga**

Zdający może rozłożyć na czynniki wielomian  $1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + x^7$ , gdzie  $x = 2013$ . Wtedy zdający otrzymuje **1 punkt** za zapisanie tego wielomianu w postaci iloczynu

$$(1 + x^4)(1 + x + x^2 + x^3),$$

a za zapisanie, że  $1 + x + x^2 + x^3 = (1 + x)(1 + x^2)$  i uzasadnienie podzielności otrzymuje **2 punkty**.

**II sposób rozwiązania**

Zauważamy, że suma  $1 + 2013 + 2013^2 + 2013^3 + 2013^4 + 2013^5 + 2013^6 + 2013^7$  jest sumą ośmiu początkowych wyrazów ciągu geometrycznego, w którym  $a_1 = 1$ ,  $q = 2013$  i  $a_8 = 2013^7$ .

Stąd

$$\begin{aligned} S_8 &= 1 \cdot \frac{1 - 2013^8}{1 - 2013} = \frac{(1 - 2013^4)(1 + 2013^4)}{1 - 2013} = \frac{(1 - 2013^2)(1 + 2013^2)(1 + 2013^4)}{1 - 2013} = \\ &= \frac{\cancel{(1 - 2013)}(1 + 2013)(1 + 2013^2)(1 + 2013^4)}{\cancel{1 - 2013}} = 2014 \cdot (1 + 2013^2)(1 + 2013^4) \end{aligned}$$

Zatem liczba  $(1 + 2013^2)(1 + 2013^4)$  jest dzielnikiem liczby

$$1 + 2013 + 2013^2 + 2013^3 + 2013^4 + 2013^5 + 2013^6 + 2013^7.$$

**Schemat oceniania II sposobu rozwiązania**

**Zdający otrzymuje .....1 pkt**  
gdy:

- zauważy, że liczba  $1 + 2013 + 2013^2 + 2013^3 + 2013^4 + 2013^5 + 2013^6 + 2013^7$  jest sumą ośmiu wyrazów ciągu geometrycznego, w którym  $a_1 = 1$ ,  $q = 2013$  i  $a_8 = 2013^7$

albo

- zapisze, że  $S_8 = 1 \cdot \frac{1 - 2013^8}{1 - 2013}$ .

**Zdający otrzymuje .....2 pkt**  
gdy przeprowadzi pełne rozumowanie i zapisze

$$1 + 2013 + 2013^2 + 2013^3 + 2013^4 + 2013^5 + 2013^6 + 2013^7 = (1 + 2013)(1 + 2013^2)(1 + 2013^4).$$

**III sposób rozwiązania**

Zauważamy, że liczbę  $1 + 2013 + 2013^2 + 2013^3 + 2013^4 + 2013^5 + 2013^6 + 2013^7$  można zapisać w postaci, np.:  $(1 + 2013^4) + 2013(1 + 2013^4) + 2013^2(1 + 2013^4) + 2013^3(1 + 2013^4) =$   
 $= (1 + 2013^4)(1 + 2013 + 2013^2 + 2013^3) = (1 + 2013^4)[(1 + 2013^2) + 2013(1 + 2013^2)] =$   
 $= (1 + 2013^4)[(1 + 2013^2) + 2013(1 + 2013^2)] = (1 + 2013^4)(1 + 2013^2)(1 + 2013).$

Zatem liczba  $(1 + 2013^2)(1 + 2013^4)$  jest dzielnikiem liczby  $1 + 2013 + 2013^2 + \dots + 2013^7$ .

**Schemat oceniania III sposobu rozwiązania**

**Zdający otrzymuje .....1 pkt**

gdy zapisze liczbę  $1 + 2013 + 2013^2 + \dots + 2013^7$  w postaci  $(1 + 2013^4)(1 + 2013 + 2013^2 + 2013^3)$

i nie zauważy, że liczbę  $(1 + 2013 + 2013^2 + 2013^3)$  można zapisać w postaci  $(1 + 2013^2)(1 + 2013)$ .

**Zdający otrzymuje .....2 pkt**

gdy przeprowadzi pełne rozumowanie.

**Zadania 31. (2 pkt)**

Nieskończony ciąg geometryczny  $(a_n)$  jest określony wzorem  $a_n = 7 \cdot 3^{n+1}$ , dla  $n \geq 1$ . Oblicz iloraz  $q$  tego ciągu.

**Rozwiązanie** (I sposób)

Ponieważ ciąg  $(a_n)$  jest geometryczny, więc wystarczy obliczyć dwa kolejne wyrazy tego ciągu, np.  $a_1 = 7 \cdot 3^{1+1} = 7 \cdot 9$  oraz  $a_2 = 7 \cdot 3^{2+1} = 7 \cdot 27$ . Iloraz ciągu  $(a_n)$  jest więc równy

$$q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{7 \cdot 27}{7 \cdot 9} = 3.$$

**Rozwiązanie** (II sposób)

Pierwszy wyraz ciągu  $(a_n)$  jest równy  $a_1 = 7 \cdot 3^{1+1} = 63$ . Ponieważ ciąg  $(a_n)$  jest geometryczny oraz  $a_n = 7 \cdot 3^{n+1} = 7 \cdot 3^n \cdot 3^1 = 21 \cdot 3^n = 63 \cdot 3^{n-1} = a_1 \cdot 3^{n-1}$ , więc ze wzoru na  $n$ -ty wyraz ciągu geometrycznego wynika, że iloraz tego ciągu jest równy  $q = 3$ .

**Rozwiązanie** (III sposób)

Ponieważ wszystkie wyrazy ciągu  $(a_n)$  są różne od zera, więc iloraz  $q$  tego ciągu jest równy

$$q = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{7 \cdot 3^{(n+1)+1}}{7 \cdot 3^{n+1}} = 3 \text{ dla } n \geq 1.$$

**Rozwiązanie** (IV sposób)

Dla każdego  $n \geq 1$  mamy  $a_{n+1} = 7 \cdot 3^{(n+1)+1} = 7 \cdot 3^{n+1} \cdot 3^1 = 3 \cdot 7 \cdot 3^{n+1} = 3 \cdot a_n$ , więc ciąg  $(a_n)$  jest geometryczny, a jego iloraz jest równy 3.

**Schemat oceniania**

**Zdający otrzymuje ..... 1 pkt**  
gdy

- obliczy dwa kolejne wyrazy ciągu  $(a_n)$ , np.:  $a_1 = 7 \cdot 3^{1+1} = 7 \cdot 9$  oraz  $a_2 = 7 \cdot 3^{2+1} = 7 \cdot 27$  oraz poprawnie zapisze relację między tymi wyrazami, np.:  $a_2 = a_1 \cdot q$  i na tym poprzestanie lub błędnie obliczy iloraz ciągu

albo

- obliczy pierwszy wyraz ciągu i zapisze  $n$ -ty wyraz ciągu w postaci  $a_n = 63 \cdot 3^{n-1}$  i na tym poprzestanie lub błędnie poda iloraz ciągu.

albo

- wyznaczy  $n+1$  wyraz ciągu  $(a_n)$  oraz poprawnie zapisze relację między wyrazami, np.:  $q = \frac{a_{n+1}}{a_n}$  lub  $a_{n+1} = a_n \cdot q$  i na tym poprzestanie lub błędnie obliczy iloraz ciągu.

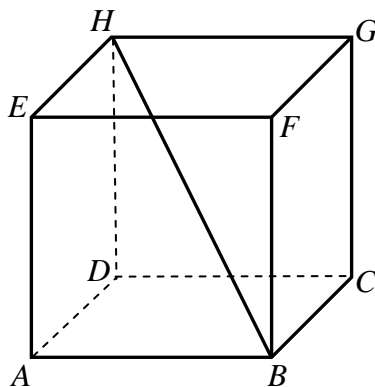
**Zdający otrzymuje ..... 2 pkt**  
gdy obliczy iloraz  $q$ :  $q = 3$ .

Uwaga

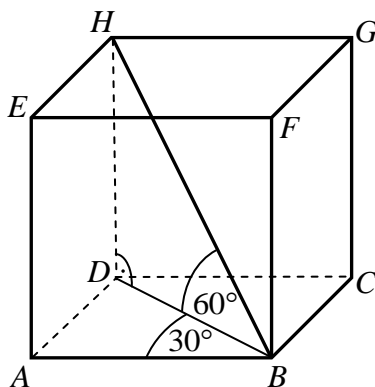
Jeżeli zdający poda od razu iloraz ciągu  $q = 3$ , to otrzymuje **2 punkty**.

**Zadanie 32. (4 pkt)**

Podstawą graniastoslupa  $ABCDEFGH$  jest prostokąt  $ABCD$  (zobacz rysunek), którego krótszy bok ma długość 3. Przekątna prostokąta  $ABCD$  tworzy z jego dłuższym bokiem kąt  $30^\circ$ . Przekątna  $HB$  graniastoslupa tworzy z płaszczyzną jego podstawy kąt  $60^\circ$ . Oblicz objętość tego graniastoslupa.



**Rozwiązanie** (krawędź podstawy  $AB$ , przekątna  $BD$  i wysokość  $DH$  graniastoslupa)



Uwaga

Strategia rozwiązania tego zadania sprowadza się do realizacji następujących etapów rozwiązania:

- obliczenie długości dłuższej krawędzi podstawy graniastoslupa, ew. długości przekątnej podstawy i wysokości tego graniastoslupa
- obliczenie pola podstawy graniastoslupa
- obliczenie objętości ostrosłupa.



Niech  $|AD| = 3$ . Z definicji tangensa kąta ostrego w trójkącie prostokątnym  $ABD$  wynika, że

$$\frac{|AD|}{|AB|} = \operatorname{tg} 30^\circ, \text{ stąd } |AB| = 3\sqrt{3}.$$

Z twierdzenia Pitagorasa zastosowanego do trójkąta  $ABD$  otrzymujemy

$$|BD| = \sqrt{3^2 + (3\sqrt{3})^2} = 6.$$

Pole  $P$  podstawy graniastoslupa (pole prostokąta  $ABCD$ ) jest równe:  $P = 9\sqrt{3}$ .

A teraz z definicji tangensa kąta ostrego w trójkącie prostokątnym  $BDH$  otrzymujemy, że

$$\frac{|DH|}{|BD|} = \operatorname{tg} 60^\circ, \text{ stąd } |DH| = 6\sqrt{3}.$$

Obliczamy zatem objętość graniastoslupa  $ABCDEFGH$ :  $V = 9\sqrt{3} \cdot 6\sqrt{3} = 162$ .

### **Schemat oceniania rozwiązania**

**Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania .....1 pkt**

Obliczenie

- długości dłuższej krawędzi podstawy graniastoslupa:  $|AB| = 3\sqrt{3}$

albo

- długości przekątnej podstawy graniastoslupa:  $|BD| = 6$ .

**Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .....2 pkt**

Obliczenie

- długości dłuższej krawędzi podstawy graniastoslupa i długości przekątnej podstawy graniastoslupa:  $|AB| = 3\sqrt{3}$ ,  $|BD| = 6$ .

albo

- pola podstawy graniastoslupa:  $P_{ABCD} = |BC| \cdot |BD| \cdot \sin 60^\circ = 3 \cdot 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 9\sqrt{3}$ .

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania .....3 pkt**

Obliczenie

- długości dłuższej krawędzi podstawy graniastoslupa i długości przekątnej podstawy graniastoslupa i wysokości graniastoslupa:  $|AB| = 3\sqrt{3}$ ,  $|BD| = 6$ ,  $|DH| = 6\sqrt{3}$

albo

- pola podstawy graniastoslupa i wysokości graniastoslupa:  $P_{ABCD} = 9\sqrt{3}$ ,  $|DH| = 6\sqrt{3}$ .

**Rozwiązanie pełne .....4 pkt**

Obliczenie objętości graniastoslupa:  $V = 162$ .

### **Uwaga**

Zdający może zauważyć, że trójkąt  $ABD$  jest „połową” trójkąta równobocznego, w którym połowa długości boku jest równa 3, pole podstawy graniastoslupa jest równe polu takiego

trójkąta równobocznego i od razu zapisać, że  $|AB| = 3\sqrt{3}$ ,  $|BD| = 6$ ,  $P_{ABCD} = \frac{6^2 \sqrt{3}}{4} = 9\sqrt{3}$ .

Podobnie może zauważyć, że trójkąt  $BHD$  jest „połową” trójkąta równobocznego, w którym połowa długości boku jest równa 6 i od razu zapisać  $|DH| = 6\sqrt{3}$ .

**Zadanie 33. (5 pkt)**

Grupa znajomych wykupiła wspólnie dostęp do Internetu na okres jednego roku. Opłata miesięczna wynosiła 120 złotych. Podzielono tę kwotę na równe części, by każdy ze znajomych płacił tyle samo. Po upływie miesiąca do grupy dołączyły jeszcze dwie osoby i wówczas opłata miesięczna przypadająca na każdego użytkownika zmniejszyła się o 5 złotych. Ile osób liczyła ta grupa w pierwszym miesiącu użytkowania Internetu?

**I sposób rozwiązania**

Niech  $x$  oznacza liczbę osób, które w pierwszym miesiącu wykupiły dostęp do Internetu, zaś  $y$  – opłatę przypadającą na każdą z tych osób (w zł). Koszt wykupienia dostępu do Internetu opisuje równanie  $x \cdot y = 120$ .

Gdy do grupy dołączyły jeszcze dwie osoby, to opłata przypadająca na każdego użytkownika zmniejszyła się o 5 złotych miesięcznie. Otrzymujemy zatem równanie:

$$(x+2) \cdot (y-5) = 120.$$

Rozwiązujemy układ równań

$$\begin{cases} x \cdot y = 120 \\ (x+2) \cdot (y-5) = 120 \end{cases}$$

Drugie równanie możemy zapisać w postaci

$$xy - 5x + 2y - 10 = 120.$$

Stąd i z pierwszego równania otrzymujemy

$$120 - 5x + 2y - 10 = 120,$$

$$2y = 5x + 10,$$

$$y = \frac{5}{2}x + 5.$$

Podstawiamy do pierwszego równania układu i otrzymujemy

$$x \left( \frac{5}{2}x + 5 \right) = 120,$$

$$\frac{5}{2}x^2 + 5x - 120 = 0,$$

$$x^2 + 2x - 48 = 0.$$

$$\Delta = 4 + 192 = 196 = 14^2$$

Zatem

$$x_1 = \frac{-2-14}{2} = -8, \quad x_2 = \frac{-2+14}{2} = 6.$$

Pierwsze z rozwiązań odrzucamy, gdyż liczba osób nie może być ujemna. Zatem w pierwszym miesiącu użytkowania Internetu grupa liczyła 6 osób.

**Uwaga**

Z równania  $120 - 5x + 2y - 10 = 120$  możemy także wyznaczyć  $x = \frac{2}{5}y - 2$ . Wówczas otrzymujemy równanie

$$\left( \frac{2}{5}y - 2 \right) y = 120,$$

$$\frac{2}{5}y^2 - 2y - 120 = 0,$$

$$y^2 - 5y - 300 = 0.$$

$$\Delta = 25 + 1200 = 1225 = 35^2$$

Zatem

$$y_1 = \frac{5-35}{2} = -15, \quad y_2 = \frac{5+35}{2} = 20.$$

Pierwsze z rozwiązań odrzucamy, gdyż opłata nie może być ujemna. Gdy  $y = 20$ , to wtedy  $x = \frac{2}{5} \cdot 20 - 2 = 6$ . Zatem w pierwszym miesiącu użytkownika Internetu grupa liczyła 6 osób.

### **Schemat oceniania I sposobu rozwiązania**

**Rozwiązanie, w którym postępek jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania ..... 1 pkt**

Zapisanie zależności między  $x$  – ilością osób w grupie i  $y$  – opłatą przypadającą na każdą z tych osób, np.:

- $x \cdot y = 120$

albo

- $(x+2) \cdot (y-5) = 120.$

**Rozwiązanie, w którym jest istotny postępek ..... 2 pkt**

Zapisanie układu równań z niewiadomymi  $x$  i  $y$ , np.  $\begin{cases} x \cdot y = 120 \\ (x+2) \cdot (y-5) = 120. \end{cases}$

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania ..... 3 pkt**

Zapisanie równania z jedną niewiadomą  $x$  lub  $y$ , np:

$$x\left(\frac{5}{2}x+5\right)=120 \text{ lub } \left(\frac{2}{5}y-2\right) \cdot y=120 \text{ lub } (x+2)\left(\frac{120}{x}-5\right)=120 \text{ lub } \left(\frac{120}{y}+2\right)(y-5)=120.$$

### **Uwaga**

Zdający nie musi zapisywać układu równań, może bezpośrednio zapisać równanie z jedną niewiadomą.

**Rozwiązanie zadania do końca, lecz z usterkami, które jednak nie przekreślają poprawności rozwiązania (np. błędy rachunkowe) ..... 4 pkt**

- zapisanie równania kwadratowego z niewiadomą  $x$  i rozwiązanie tego równania z błędem rachunkowym

albo

- bezbłędne rozwiązanie równania z niewiadomą  $y$  i nie obliczenie liczby osób, które w pierwszym miesiącu wykupiły dostęp do Internetu

albo

- rozwiązanie równania z niewiadomą  $y$  z błędem rachunkowym i konsekwentne obliczenie liczby osób, które w pierwszym miesiącu wykupiły dostęp do Internetu.

**Rozwiązanie pełne ..... 5 pkt**

Obliczenie liczby osób, które w pierwszym miesiącu wykupiły dostęp do Internetu: 6.

### **II sposób rozwiązania**

Niech  $x$  oznacza liczbę osób, które w pierwszym miesiącu wykupiły dostęp do Internetu.

Wtedy opłata przypadająca na każdą z tych osób jest równa  $\frac{120}{x}$  zł. Gdy do grupy dołączyły jeszcze dwie osoby, to liczba osób w grupie jest wtedy równa  $x+2$ , więc opłata

przypadająca wówczas na każdego użytkownika jest równa  $\frac{120}{x+2}$  zł. Ponieważ opłata zmniejszyła się o 5 zł, więc otrzymujemy równanie

$$\frac{120}{x} = \frac{120}{x+2} + 5.$$

Przekształcamy je do postaci

$$x^2 + 2x - 48 = 0.$$

$$\Delta = 4 + 192 = 196 = 14^2$$

Zatem

$$x_1 = \frac{-2-14}{2} = -8, \quad x_2 = \frac{-2+14}{2} = 6.$$

Pierwsze z rozwiązań odrzucamy, gdyż liczba osób nie może być ujemna. Zatem w pierwszym miesiącu użytkowania Internetu grupa liczyła 6 osób.

### **Schemat oceniania II sposobu rozwiązania**

**Rozwiązanie, w którym postępek jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania** ..... **1 pkt**

Przyjęcie oznaczenia, np.:  $x$  - liczba osób, które w pierwszym miesiącu wykupiły dostęp do Internetu oraz wyznaczenie opłaty przypadającej na jedną osobę w zależności od przyjętej zmiennej  $\frac{120}{x}$ .

**Rozwiązanie, w którym jest istotny postępek** ..... **2 pkt**

Wyznaczenie opłaty przypadającej na jedną osobę w zależności od przyjętej zmiennej w sytuacji, gdy liczba osób zwiększyła się o 2:  $\frac{120}{x+2}$ .

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania** ..... **3 pkt**

Zapisanie równania z jedną niewiadomą:  $\frac{120}{x} = \frac{120}{x+2} + 5$ .

**Rozwiązanie zadania do końca, lecz z usterkami, które jednak nie przekreślają poprawności rozwiązania (np. błędy rachunkowe)** ..... **4 pkt**

Zapisanie równania kwadratowego, np.  $x^2 + 2x - 48 = 0$  i rozwiązanie go z błędem rachunkowym.

**Rozwiązanie pełne** ..... **5 pkt**

Obliczenie liczby osób, które w pierwszym miesiącu wykupiły dostęp do Internetu: 6.

### **Uwagi**

1. Jeżeli zdający porównuje wielkości różnych typów, to otrzymuje **0 punktów**.
2. Jeżeli zdający odgadnie liczbę osób, które w pierwszym miesiącu wykupiły dostęp do Internetu i nie uzasadni, że jest to jedyne rozwiązanie, to otrzymuje **1 punkt**.
3. Jeżeli zdający poda liczbę osób, które w pierwszym miesiącu wykupiły dostęp do Internetu i nie uzasadni, że jest to jedyne rozwiązanie, ale sprawdzi, że spełnione są wówczas warunki zadania, to otrzymuje **2 punkty**.
4. Jeżeli zdający systematycznie sprawdza, czy są spełnione warunki zadania dla kolejnych liczb od 1 do 6 i poda liczbę osób, które w pierwszym miesiącu wykupiły dostęp do Internetu, to otrzymuje **5 punktów**.

**Zadanie 34. (5 pkt)**

Wierzchołki trapezu  $ABCD$  mają współrzędne:  $A = (-1, -5)$ ,  $B = (5, 1)$ ,  $C = (1, 3)$ ,  $D = (-2, 0)$ . Napisz równanie okręgu, który jest styczny do podstawy  $AB$  tego trapezu, a jego środek jest punktem przecięcia się prostych zawierających ramiona  $AD$  oraz  $BC$  trapezu  $ABCD$ .

**Rozwiązanie**

Wyznaczamy równania prostych zawierających ramiona  $AD$  oraz  $BC$  trapezu, odpowiednio:

$$y = -5x - 10 \text{ oraz } y = -\frac{1}{2}x + \frac{7}{2}.$$

Środkiem okręgu  $S$  jest punkt przecięcia się prostych o wyznaczonych równaniach.

Aby wyznaczyć współrzędne punktu  $S$  zapisujemy i rozwiązujemy układ równań:

$$\begin{cases} y = -5x - 10 \\ y = -\frac{1}{2}x + \frac{7}{2} \end{cases}$$

Stąd  $-\frac{1}{2}x + \frac{7}{2} = -5x - 10$ , czyli  $x = -3$ . Zatem  $y = 5$ , czyli  $S = (-3, 5)$ . Zauważmy, że

promień szukanego okręgu jest równy odległości punktu  $S$  od prostej  $AB$ . Trzeba też sprawdzić, czy punkt styczności okręgu i prostej  $AB$  leży na podstawie tego trapezu.

Wyznaczamy równanie prostej prostopadłej do prostej  $AB$  przechodzącej przez punkt  $S$ :

$y = -x + 2$ , a następnie wyznaczamy współrzędne punktu  $P$  przecięcia się tej prostej z prostą

$AB$ . Rozwiązujemy zatem układ równań  $\begin{cases} y = -x - 2 \\ y = x - 4 \end{cases}$  i zapisujemy, że  $P = (3, -1)$ .

Zauważmy, że punkt  $P$  leży między punktami  $A$  i  $B$ , gdyż  $x_A = -1 < x_P = 3 < x_B = 5$ .

Obliczamy promień okręgu  $r$ :

$$r = |SP| = \sqrt{(3+3)^2 + (-1-5)^2} = \sqrt{72} = 6\sqrt{2}.$$

Zapisujemy równanie okręgu ośrodku  $S$  i promieniu  $r$ :

$$(x+3)^2 + (y-5)^2 = 72.$$

**Uwaga**

Promień okręgu  $r$  możemy także wyznaczyć w inny sposób:

1. Wyznaczamy równanie prostej  $AB$ :  $y = x - 4$  i obliczamy promień

$$\text{okręgu: } r = \frac{|-3-5-4|}{\sqrt{1+1}} = \frac{12}{\sqrt{2}} = 6\sqrt{2}.$$

2. Obliczamy pole trójkąta  $ABS$ , korzystając ze wzoru na pole trójkąta o wierzchołkach  $A = (-1, -5)$ ,  $B = (5, 1)$ ,  $S = (-3, 5)$ :

$$P_{ABS} = \frac{1}{2} |(5+1)(5+5) - (1+5)(-3+1)| = \frac{1}{2} |60 - (-12)| = 36.$$

Pole trójkąta  $ABS$  możemy zapisać w inny sposób:  $P_{ABS} = \frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot r$ .

Ponieważ  $|AB| = \sqrt{6^2 + 6^2} = \sqrt{72} = 6\sqrt{2}$ , to  $36 = \frac{1}{2} \cdot 6\sqrt{2} \cdot r$ . Stąd  $r = \frac{36}{3\sqrt{2}} = 6\sqrt{2}$ .

**Schemat oceniania**

**Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania.....1 pkt**

Zapisanie równania prostej zawierającej ramię  $AD$  trapezu **albo** równania prostej zawierającej ramię  $BC$  trapezu, odpowiednio:  $y = -5x - 10$  albo  $y = -\frac{1}{2}x + \frac{7}{2}$ .

**Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .....2 pkt**

Obliczenie współrzędnych środka okręgu  $S$ :  $S = (-3, 5)$ .

**Uwaga**

Zdający może podać rozwiązanie układu równań  $\begin{cases} y = -5x - 10 \\ y = -\frac{1}{2}x + \frac{7}{2} \end{cases}$  bez obliczeń.

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania.....3 pkt**

Obliczenie promienia  $r$  okręgu:  $r = 6\sqrt{2}$ .

**Rozwiązanie zadania do końca, lecz z usterkami, które jednak nie przekreślają poprawności rozwiązania (np. błędy rachunkowe) ..... 4 pkt**

- wyznaczenie współrzędnych środka okręgu z błędem rachunkowym i konsekwentne obliczenie długości promienia okręgu oraz zapisanie równania okręgu

albo

- obliczenie długości promienia okręgu z błędem rachunkowym i konsekwentne zapisanie równania okręgu.

**Rozwiązanie pełne .....5 pkt**

Zapisanie równania okręgu ośrodkiem  $S$  i promieniu  $r$ :  $(x+3)^2 + (y-5)^2 = 72$ .

**Uwaga**

Jeśli zdający odczytał z rysunku współrzędne środka okręgu  $S$ , nie sprawdził, że ten punkt należy do prostych  $AD$  i  $BC$  i kontynuował rozwiązanie do końca, to za takie rozwiązanie może otrzymać maksymalnie **4 punkty**.