



**Centralna Komisja Egzaminacyjna**

**EGZAMIN MATURALNY 2013**

**MATEMATYKA**

**POZIOM PODSTAWOWY**

**Kryteria oceniania odpowiedzi**

**MAJ 2013**

**Zadanie 1. (0–1)**

Obszar standardów	Opis wymagań	Poprawna odpowiedź (1 p.)	
		Wersja arkusza A	Wersja arkusza B
Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji	Wykorzystanie pojęcia wartości bezwzględnej i jej interpretacji geometrycznej do wskazania zbioru rozwiązań nierówności typu $ x - a  < b$ (II.1.f)	<b>A</b>	<b>D</b>

**Zadanie 2. (0–1)**

Modelowanie matematyczne	Zastosowanie pojęcia procentu (III.1.d)	<b>B</b>	<b>C</b>
--------------------------	---	----------	----------

**Zadanie 3. (0–1)**

Wykorzystanie i tworzenie informacji	Wykonanie obliczeń z zastosowaniem wzorów na logarytm iloczynu, logarytm ilorazu i logarytm potęgi o wykładniku naturalnym (I.1.h)	<b>B</b>	<b>C</b>
--------------------------------------	--	----------	----------

**Zadanie 4. (0–1)**

Wykorzystanie i tworzenie informacji	Rozwiązanie układu równań liniowych (I.3.c)	<b>C</b>	<b>A</b>
--------------------------------------	---	----------	----------

**Zadanie 5. (0–1)**

Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji	Wykorzystanie interpretacji współczynników we wzorze funkcji liniowej (II.4.g)	<b>D</b>	<b>A</b>
---	--	----------	----------

**Zadanie 6. (0–1)**

Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji	Odczytanie ze wzoru funkcji kwadratowej współrzędnych wierzchołka paraboli (II.4.b)	<b>D</b>	<b>C</b>
---	---	----------	----------

**Zadanie 7. (0–1)**

Wykorzystanie i tworzenie informacji	Posługiwanie się wzorami skróconego mnożenia (I.2.a)	<b>C</b>	<b>B</b>
--------------------------------------	--	----------	----------

**Zadanie 8. (0–1)**

Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji	Badanie prostopadłości prostych na podstawie ich równań kierunkowych (II.8.c)	<b>D</b>	<b>A</b>
---	---	----------	----------

**Zadanie 9. (0–1)**

Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji	Wykorzystanie współczynników we wzorze funkcji liniowej do określenia położenia prostej w układzie współrzędnych (II.4.g)	<b>A</b>	<b>C</b>
---	---	----------	----------

**Zadanie 10. (0–1)**

Wykorzystanie i tworzenie informacji	Rozwiązanie nierówności liniowej i wskazanie najmniejszej liczby spełniającej tę nierówność (I.3)	<b>B</b>	<b>C</b>
--------------------------------------	---	----------	----------

**Zadanie 11. (0–1)**

Wykorzystanie i tworzenie informacji	Wykorzystanie wykresu funkcji $y = f(x)$ do wskazania wykresu funkcji typu $y = f(x+a)$ , $y = f(x-a)$ , $y = -f(x)$ , $y = f(-x)$ (I.4.d)	<b>C</b>	<b>A</b>
--------------------------------------	--	----------	----------

**Zadanie 12. (0–1)**

Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji	Wykorzystanie własności ciągu geometrycznego (II.5.c)	<b>C</b>	<b>B</b>
---	---	----------	----------

**Zadanie 13. (0–1)**

Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji	Wykorzystanie własności ciągu arytmetycznego (II.5.c)	<b>B</b>	<b>C</b>
---	---	----------	----------

**Zadanie 14. (0–1)**

Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji	Zastosowanie prostych związków między funkcjami trygonometrycznymi kąta ostrego do obliczenia wartości wyrażenia (II.6.c)	<b>A</b>	<b>D</b>
---	---	----------	----------

**Zadanie 15. (0–1)**

Wykorzystanie i tworzenie informacji	Wykorzystanie związków między kątem wpisanym i środkowym (I.7.a)	<b>A</b>	<b>D</b>
--------------------------------------	--	----------	----------

**Zadanie 16. (0–1)**

Wykorzystanie i tworzenie informacji	Rozwiązanie równania wielomianowego (I.3.d)	<b>C</b>	<b>B</b>
--------------------------------------	---	----------	----------

**Zadanie 17. (0–1)**

Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji	Obliczanie odległości punktów na płaszczyźnie i obwodu rombu (II.8.e)	<b>D</b>	<b>B</b>
---	---	----------	----------

**Zadanie 18. (0–1)**

Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji	Wykorzystanie współrzędnych środka odcinka do wyznaczenia jednego z końców tego odcinka (II.8.f)	<b>C</b>	<b>D</b>
---	--	----------	----------

**Zadanie 19. (0–1)**

Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji	Posługiwanie się równaniem okręgu $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ (II.8.g)	<b>A</b>	<b>C</b>
---	--	----------	----------

**Zadanie 20. (0–1)**

Wykorzystanie i tworzenie informacji	Wyznaczanie związków miarowych w wielościanie (I.9.b)	<b>B</b>	<b>C</b>
--------------------------------------	---	----------	----------

**Zadanie 21. (0–1)**

Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji	Wyznaczanie związków miarowych w bryłach obrotowych (II.9.b)	<b>C</b>	<b>B</b>
---	--	----------	----------

**Zadanie 22. (0–1)**

Modelowanie matematyczne	Stosuje twierdzenie znane jako klasyczna definicja prawdopodobieństwa do obliczania prawdopodobieństw zdarzeń (III.10.d)	<b>B</b>	<b>C</b>
--------------------------	--	----------	----------

**Zadanie 23. (0–1)**

Wykorzystanie i tworzenie informacji	Wykonywanie obliczeń na liczbach rzeczywistych, w tym obliczeń na pierwiastkach (I.1.a)	<b>B</b>	<b>C</b>
--------------------------------------	---	----------	----------

**Zadanie 24. (0–1)**

Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji	Obliczanie mediany uporządkowanego zestawu danych (II.10.a)	<b>D</b>	<b>A</b>
---	---	----------	----------

**Zadanie 25. (0–1)**

Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji	Wykorzystanie związków miarowych w graniastosłupie do obliczenia jego objętości (II.9.b)	<b>B</b>	<b>C</b>
---	--	----------	----------

## Schemat oceniania do zadań otwartych

### Zadanie 26. (0–2)

Rozwiąż równanie  $x^3 + 2x^2 - 8x - 16 = 0$ .

Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji	Rozwiązanie równania wielomianowego metodą rozkładu na czynniki (II.3.d)
---	--

#### I sposób rozwiązania (metoda grupowania)

Przedstawiamy lewą stronę równania w postaci iloczynu stosując metodę grupowania wyrazów:

$$x(x^2 - 8) + 2(x^2 - 8) = 0 \quad \text{lub} \quad x^2(x + 2) - 8(x + 2) = 0$$

$$(x + 2)(x^2 - 8) = 0.$$

Stąd  $x = -2$  lub  $x = -\sqrt{8} = -2\sqrt{2}$  lub  $x = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ .

#### Schemat oceniania I sposobu rozwiązania

**Zdający otrzymuje .....1 pkt**

gdy zapisze lewą stronę równania w postaci iloczynu, np.:  $(x + 2)(x^2 - 8)$ ,

$(x + 2)(x - \sqrt{8})(x + \sqrt{8})$ , przy czym postać ta musi być otrzymana w sposób poprawny i na tym poprzestanie lub dalej popełni błędy.

**Zdający otrzymuje .....2 pkt**

gdy wyznaczy bezbłędnie wszystkie rozwiązania równania:  $x = -2$ ,  $x = -\sqrt{8}$ ,  $x = \sqrt{8}$ .

#### II sposób rozwiązania (metoda dzielenia)

Stwierdzamy, że liczba  $-2$  jest pierwiastkiem wielomianu  $x^3 + 2x^2 - 8x - 16$ . Dzielimy wielomian  $x^3 + 2x^2 - 8x - 16$  przez dwumian  $(x + 2)$ . Otrzymujemy iloraz  $(x^2 - 8)$ .

Zapisujemy równanie w postaci  $(x + 2)(x^2 - 8) = 0$ . Stąd  $(x + 2)(x + \sqrt{8})(x - \sqrt{8}) = 0$  i  $x = -2$  lub  $x = -\sqrt{8} = -2\sqrt{2}$  lub  $x = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ .

#### Schemat oceniania II sposobu rozwiązania

**Zdający otrzymuje .....1 pkt**

gdy podzieli wielomian  $x^3 + 2x^2 - 8x - 16$  przez dwumian  $(x + 2)$ , otrzyma iloraz  $(x^2 - 8)$  i na tym poprzestanie lub dalej popełni błędy.

**Zdający otrzymuje .....2 pkt**

gdy wyznaczy bezbłędnie wszystkie rozwiązania równania:  $x = -2$ ,  $x = -\sqrt{8}$ ,  $x = \sqrt{8}$ .

**Zadanie 27. (0–2)**

Kąt  $\alpha$  jest ostry i  $\sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$ . Oblicz wartość wyrażenia  $\sin^2 \alpha - 3 \cos^2 \alpha$ .

Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji	Zastosowanie prostych związków między funkcjami trygonometrycznymi kąta ostrego do obliczenia wartości wyrażenia (II.6.c)
---	---

**I sposób rozwiązania** (wykorzystanie znanych wartości funkcji trygonometrycznych)

Ponieważ  $\alpha$  jest ostry i  $\sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$ , więc  $\alpha = 60^\circ$ . Zatem  $\cos \alpha = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$ .

$$\text{Stąd } \sin^2 \alpha - 3 \cos^2 \alpha = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - 3\left(\frac{1}{2}\right)^2 = 0.$$

**Schemat oceniania I sposobu rozwiązania**

**Zdający otrzymuje** .....1 pkt

gdy zapisze wartość cosinusa kąta  $\alpha$ :  $\cos \alpha = \frac{1}{2}$  i na tym poprzestanie lub dalej popełni

błędy.

**Zdający otrzymuje** .....2 pkt

gdy obliczy, że  $\sin^2 \alpha - 3 \cos^2 \alpha = 0$ .

**II sposób rozwiązania** (wykorzystanie związków między funkcjami trygonometrycznymi)

Obliczamy  $\sin^2 \alpha = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}$ , następnie korzystając z tożsamości  $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$

obliczamy  $\cos^2 \alpha = \frac{1}{4}$ , stąd  $\sin^2 \alpha - 3 \cos^2 \alpha = 0$

albo

korzystając z tożsamości  $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ , przekształcamy wyrażenie  $\sin^2 \alpha - 3 \cos^2 \alpha$  do postaci  $4 \sin^2 \alpha - 3$ , a następnie obliczamy jego wartość:  $4 \sin^2 \alpha - 3 = 0$ .

**Schemat oceniania II sposobu rozwiązania**

**Zdający otrzymuje** .....1 pkt

gdy:

- obliczy  $\cos^2 \alpha = \frac{1}{4}$

albo

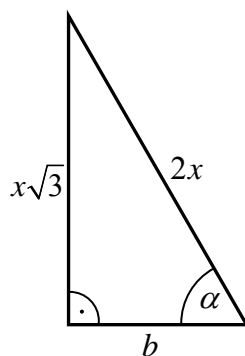
- zapisze wyrażenie w postaci  $\sin^2 \alpha - 3(1 - \sin^2 \alpha)$

i na tym poprzestanie lub dalej popełni błędy.

**Zdający otrzymuje** .....2 pkt

gdy obliczy, że  $\sin^2 \alpha - 3 \cos^2 \alpha = 0$ .

**III sposób rozwiązania** (trójkąt prostokątny)



Z twierdzenia Pitagorasa otrzymujemy  $b^2 = (2x)^2 - (\sqrt{3}x)^2$ , więc  $b = x$ .

Stąd  $\cos \alpha = \frac{x}{2x} = \frac{1}{2}$ , więc  $\sin^2 \alpha - 3\cos^2 \alpha = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - 3\left(\frac{1}{2}\right)^2 = 0$ .

**Schemat oceniania III sposobu rozwiązania**

**Zdający otrzymuje .....1 pkt**  
gdy:

- narysuje trójkąt prostokątny o przyprostokątnej długości  $\sqrt{3}$  i przeciwprostokątnej długości 2 (lub ich wielokrotności), obliczy długość drugiej przyprostokątnej, zaznaczy w tym trójkącie poprawnie kąt, obliczy cosinus tego kąta i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy

albo

- obliczy długość przyprostokątnej trójkąta prostokątnego o przyprostokątnej długości  $\sqrt{3}$  i przeciwprostokątnej długości 2 (lub ich wielokrotności) z błędem rachunkowym, obliczy cosinus tego kąta  $\cos \alpha$  (o ile otrzymana wartość jest dodatnia i mniejsza od 1) i konsekwentnie obliczy wartość wyrażenia  $\sin^2 \alpha - 3\cos^2 \alpha$ .

**Zdający otrzymuje .....2 pkt**  
gdy obliczy wartość  $\sin^2 \alpha - 3\cos^2 \alpha = 0$ .

**Zadania 28. (0–2)**

Udowodnij, że dla dowolnych liczb rzeczywistych  $x, y, z$  takich, że  $x + y + z = 0$ , prawdziwa jest nierówność  $xy + yz + zx \leq 0$ .

Możesz skorzystać z tożsamości  $(x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2yz$ .

Rozumowanie i argumentacja	Uzasadnienie prawdziwości nierówności algebraicznej (V.2.b)
----------------------------	---

**I sposób rozwiązania**

Podnosimy obie strony równości  $x + y + z = 0$  do kwadratu i otrzymujemy równość równoważną

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2yz = 0.$$

Stąd

$$xy + xz + yz = -\frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2).$$

Ponieważ suma kwadratów liczb  $x, y, z$  jest nieujemna, więc  $-\frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2) \leq 0$ , czyli  $xy + yz + zx \leq 0$ , co kończy dowód.

### **Schemat oceniania I sposobu rozwiązania**

**Zdający otrzymuje .....1 pkt**  
gdy podniesie obie strony równości  $x + y + z = 0$  do kwadratu i zapisze np.

$$xy + xz + yz = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{2}z^2 \quad \text{lub} \quad 2xy + 2xz + 2yz = -x^2 - y^2 - z^2$$

i na tym dowód zakończy nie uzasadniając znaku wyrażenia  $-\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{2}z^2$  lub  $-x^2 - y^2 - z^2$ .

**Zdający otrzymuje .....2 pkt**  
gdy przeprowadzi pełny dowód.

### **II sposób rozwiązania**

Z równości  $x + y + z = 0$  wyznaczamy jedną z liczb, np.  $z = -x - y$ . Wtedy otrzymujemy

$$\begin{aligned} xy + xz + yz &= xy + x(-x - y) + y(-x - y) = xy - x^2 - xy - xy - y^2 = \\ &= -x^2 - xy - y^2 = -(x^2 + xy + y^2). \end{aligned}$$

Wyrażenie  $x^2 + xy + y^2$  traktujemy jak trójmian kwadratowy zmiennej  $x$ . Wówczas jego wyróżnik jest równy  $\Delta = y^2 - 4 \cdot 1 \cdot y^2 = -3y^2 \leq 0$ . To, wraz z dodatnim znakiem współczynnika przy  $x^2$ , oznacza, że trójmian przyjmuje jedynie wartości nieujemne, czyli  $x^2 + xy + y^2 \geq 0$ . Stąd  $xy + xz + yz = -(x^2 + xy + y^2) \leq 0$ .

Możemy również zauważyć, że  $x^2 + xy + y^2 = (x + \frac{1}{2}y)^2 + \frac{3}{4}y^2$ . Jest to suma dwóch liczb nieujemnych, a więc jest nieujemna. Stąd  $xy + xz + yz = -(x^2 + xy + y^2) \leq 0$ .

Możemy również zauważyć, że  $x^2 + xy + y^2 = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}(x + y)^2 + \frac{1}{2}y^2$ . Jest to suma trzech liczb nieujemnych, a więc jest nieujemna. Stąd  $xy + xz + yz = -(x^2 + xy + y^2) \leq 0$ .

To kończy dowód.

### **Schemat oceniania II sposobu rozwiązania**

**Zdający otrzymuje .....1 pkt**  
gdy wyznaczy z równości  $x + y + z = 0$  jedną z liczb i zapisze wyrażenie  $xy + xz + yz$

w zależności od dwóch zmiennych, np. zmiennych  $x$  i  $y$ :  $xy + xz + yz = -x^2 - xy - y^2$

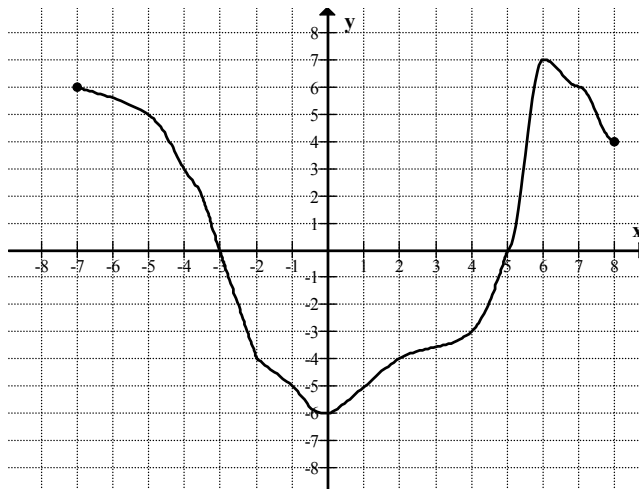
i na tym dowód zakończy nie uzasadniając znaku wyrażenia  $-x^2 - xy - y^2$ .

**Zdający otrzymuje .....2 pkt**  
gdy przeprowadzi pełny dowód.



### Zadania 29. (0–2)

Na rysunku przedstawiony jest wykres funkcji  $f(x)$  określonej dla  $x \in \langle -7, 8 \rangle$ .



Odczytaj z wykresu i zapisz:

- największą wartość funkcji  $f$ ,
- zbiór wszystkich argumentów, dla których funkcja przyjmuje wartości ujemne.

Wykorzystanie  
i interpretowanie  
reprezentacji

Odczytywanie z wykresu funkcji zbioru jej wartości oraz przedziałów w których funkcja przyjmuje wartości ujemne (II.4.b)

#### Rozwiązanie

Odczytujemy z wykresu największą wartość funkcji  $f$ . Jest ona równa 7.

Podajemy zbiór tych wszystkich argumentów, dla których funkcja  $f$  przyjmuje wartości ujemne:  $(-3, 5)$ .

#### Schemat oceniania

**Zdający otrzymuje .....1 pkt**  
gdy:

- poda największą wartość funkcji: 7 i nie poda zbioru tych wszystkich argumentów, dla których funkcja  $f$  przyjmuje wartości ujemne

albo

- poda zbiór tych wszystkich argumentów, dla których funkcja  $f$  przyjmuje wartości ujemne:  $(-3, 5)$  i nie poda największej wartości funkcji  $f$ .

#### Uwaga

Akceptujemy zapisy:  $x \in (-3, 5)$  lub  $-3 < x < 5$  lub  $x > -3$  i  $x < 5$   
lub  $x > -3$ ,  $x < 5$ .

**Zdający otrzymuje .....2 pkt**  
gdy poda największą wartość funkcji oraz poda zbiór tych wszystkich argumentów, dla których funkcja  $f$  przyjmuje wartości ujemne: 7,  $(-3, 5)$ .

#### Kryteria oceniania uwzględniające specyficzne trudności w uczeniu się matematyki

W rozwiązaniu podpunktu b) akceptujemy zapisy:  $x \in (5, -3)$ ,  $x \in (3, 5)$ ,  $x \in (3, -5)$ .

**Zadania 30. (0–2)**Rozwiąż nierówność  $2x^2 - 7x + 5 \geq 0$ .Wykorzystanie  
i interpretowanie  
reprezentacji

Rozwiązanie nierówności kwadratowej (II.3.a)

**Rozwiązanie**

Rozwiązanie nierówności kwadratowej składa się z dwóch etapów.

**Pierwszy etap rozwiązania:**Znajdujemy pierwiastki trójmianu kwadratowego  $2x^2 - 7x + 5$ 

- obliczamy wyróżnik tego trójmianu:

$$\Delta = 49 - 4 \cdot 2 \cdot 5 = 9 \text{ i stąd } x_1 = \frac{7-3}{4} = 1 \text{ oraz } x_2 = \frac{7+3}{4} = \frac{5}{2}$$

albo

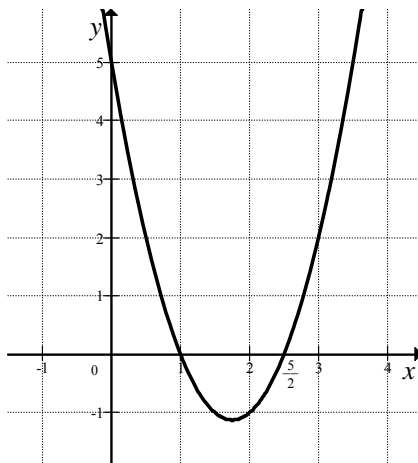
- stosujemy wzory Viète'a:

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{5}{2} \text{ oraz } x_1 + x_2 = \frac{7}{2}, \text{ stąd } x_1 = 1 \text{ oraz } x_2 = \frac{5}{2}$$

albo

- podajemy je bezpośrednio, np. zapisując pierwiastki trójmianu lub postać iloczynową trójmianu lub zaznaczając je na wykresie

$$x_1 = 1, x_2 = 2\frac{1}{2} \text{ lub } 2(x-1)\left(x-\frac{5}{2}\right)$$

**Drugi etap rozwiązania:**

Podajemy zbiór rozwiązań nierówności:  $(-\infty, 1) \cup \langle \frac{5}{2}, +\infty)$  lub  $x \in (-\infty, 1) \cup \langle \frac{5}{2}, +\infty)$  lub  $(x \leq 1 \text{ lub } x \geq \frac{5}{2})$ .

**Schemat oceniania**

Zdający otrzymuje .....1 pkt  
gdy:

- zrealizuje pierwszy etap rozwiązania i na tym poprzestanie lub błędnie zapisze zbiór rozwiązań nierówności, np.

- obliczy lub poda pierwiastki trójmianu kwadratowego  $x_1 = 1$ ,  $x_2 = \frac{5}{2}$  i na tym poprzestanie lub błędnie zapisze zbiór rozwiązań nierówności,
- zaznaczy na wykresie miejsca zerowe funkcji  $f(x) = 2x^2 - 7x + 5$  i na tym poprzestanie lub błędnie zapisze zbiór rozwiązań nierówności,
- rozłoży trójmian kwadratowy na czynniki liniowe, np.  $2\left(x - \frac{10}{4}\right)\left(x - \frac{4}{4}\right)$  i na tym poprzestanie lub błędnie rozwiąże nierówność,
- zapisze nierówność  $\left|x - \frac{7}{4}\right| \geq \frac{3}{4}$  i na tym poprzestanie lub błędnie zapisze zbiór rozwiązań nierówności,

albo

- realizując pierwszy etap popełni błąd (ale otrzyma dwa różne pierwiastki) i konsekwentnie do tego rozwiąże nierówność, np.
- popełni błąd rachunkowy przy obliczaniu wyróżnika lub pierwiastków trójmianu kwadratowego i konsekwentnie do popełnionego błędu rozwiąże nierówność,
- błędnie zapisze równania wynikające ze wzorów Viète'a, np.:  $x_1 \cdot x_2 = -\frac{5}{2}$  oraz  $x_1 + x_2 = \frac{7}{2}$  i konsekwentnie do popełnionego błędu rozwiąże nierówność,
- błędnie zapisze nierówność, np.  $\left|x + \frac{7}{4}\right| \geq \frac{3}{4}$  i konsekwentnie do popełnionego błędu rozwiąże nierówność.

**Zdający otrzymuje .....2 pkt**  
gdy:

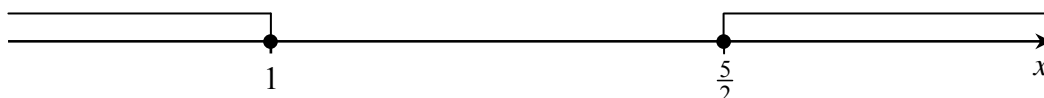
- poda zbiór rozwiązań nierówności:  $(-\infty, 1) \cup (\frac{5}{2}, +\infty)$  lub  $x \in (-\infty, 1) \cup (\frac{5}{2}, +\infty)$  lub  $(x \leq 1 \text{ lub } x \geq \frac{5}{2})$ ,

albo

- sporządzi ilustrację geometryczną (oś liczbowa, wykres) i zapisze zbiór rozwiązań nierówności w postaci:  $x \leq 1$ ,  $x \geq \frac{5}{2}$

albo

- poda zbiór rozwiązań nierówności w postaci graficznej z poprawnie zaznaczonymi końcami przedziałów



**Kryteria oceniania uwzględniające specyficzne trudności w uczeniu się matematyki**

1. Akceptujemy sytuację, gdy zdający poprawnie obliczy pierwiastki trójmianu  $x_1 = 1$ ,  $x_2 = \frac{5}{2}$  i zapisze, np.  $x \in (-\infty, -1) \cup \langle \frac{2}{5}, +\infty \rangle$ , popełniając tym samym błąd przy przepisywaniu jednego z pierwiastków, to za takie rozwiązanie otrzymuje **2 punkty**.
2. Jeśli zdający pomyli porządek liczb na osi liczbowej, np. zapisze zbiór rozwiązań nierówności w postaci  $x \in (-\infty, \frac{5}{2}) \cup \langle 1, +\infty \rangle$ , to otrzymuje **2 punkty**.

**Zadania 31. (0–2)**

Wykaż, że liczba  $6^{100} - 2 \cdot 6^{99} + 10 \cdot 6^{98}$  jest podzielna przez 17.

Rozumowanie i argumentacja	Przeprowadzenie dowodu algebraicznego (V.1.g)
----------------------------	---

**Rozwiązanie**

Wyłączamy wspólny czynnik przed nawias  $6^{98} \cdot (6^2 - 2 \cdot 6 + 10)$ . Doprowadzamy do postaci  $6^{98} \cdot 2 \cdot 17$ .

**Schemat oceniania rozwiązania**

**Zdający otrzymuje .....1 pkt**

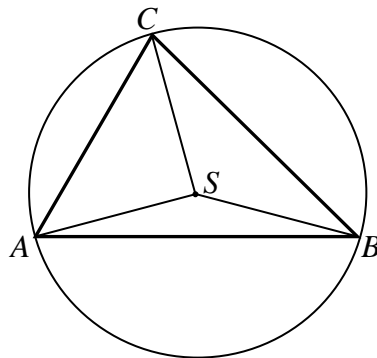
gdy zapisze liczbę  $6^{100} - 2 \cdot 6^{99} + 10 \cdot 6^{98}$  w postaci iloczynu, w którym jeden z czynników jest potęgą  $6^k$ , gdzie  $80 \leq k \leq 98$ , np.  $6^{98} (6^2 - 2 \cdot 6 + 10)$  i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy.

**Zdający otrzymuje .....2 pkt**

gdy zapisze liczbę w postaci, w której widać podzielność przez 17 albo przeprowadzi rozumowanie uzasadniające podzielność przez 17.

**Zadania 32. (0–4)**

Punkt  $S$  jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie ostrokątnym  $ABC$ . Kąt  $ACS$  jest trzy razy większy od kąta  $BAS$ , a kąt  $CBS$  jest dwa razy większy od kąta  $BAS$ . Oblicz kąty trójkąta  $ABC$ .

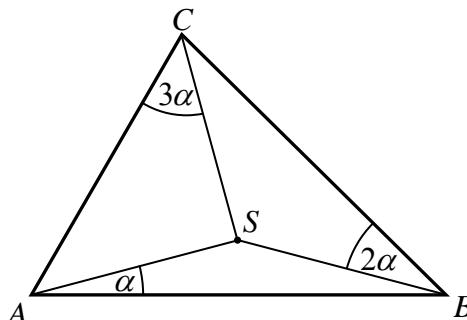


Użycie i tworzenie strategii	Wyznaczanie związków miarowych w figurach płaskich (IV.7.c)
------------------------------	---

**I sposób rozwiązania**

Ponieważ trójkąt  $ABC$  jest ostrokątny, więc środek okręgu opisanego na tym trójkącie leży wewnątrz tego trójkąta. Niech  $\alpha$  oznacza miarę kąta  $BAS$ . Wówczas

$$|\sphericalangle CBS| = 2\alpha \text{ i } |\sphericalangle ACS| = 3\alpha.$$



Każdy z trójkątów  $ABS$ ,  $BCS$  i  $CAS$  jest równoramienny, więc

$$|\sphericalangle ABS| = |\sphericalangle BAS| = \alpha, \quad |\sphericalangle BCS| = |\sphericalangle CBS| = 2\alpha, \quad |\sphericalangle CAS| = |\sphericalangle ACS| = 3\alpha.$$

Miary kątów trójkąta  $ABC$  są więc równe

$$|\sphericalangle BAC| = 4\alpha, \quad |\sphericalangle CBA| = 3\alpha, \quad |\sphericalangle ACB| = 5\alpha.$$

Suma miar kątów trójkąta jest równa  $180^\circ$ , zatem

$$4\alpha + 3\alpha + 5\alpha = 180^\circ,$$

$$12\alpha = 180^\circ,$$

$$\alpha = 15^\circ.$$

Więc  $|\sphericalangle BAC| = 4\alpha = 4 \cdot 15^\circ = 60^\circ$ ,  $|\sphericalangle CBA| = 3\alpha = 3 \cdot 15^\circ = 45^\circ$ ,  $|\sphericalangle ACB| = 5\alpha = 5 \cdot 15^\circ = 75^\circ$ .

**Schemat oceniania I sposobu rozwiązania**

**Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania .....1 pkt**

- Zapisanie miar kątów  $BAS$ ,  $ACS$  i  $CBS$  w zależności od jednej zmiennej, np.:  $|\sphericalangle BAS| = \alpha$ ,  
 $|\sphericalangle CBS| = 2\alpha$  i  $|\sphericalangle ACS| = 3\alpha$

albo

- wykorzystanie faktu, że co najmniej dwa spośród trójkątów  $ABS$ ,  $BCS$  i  $CAS$  są równoramienne, np.:  $|\sphericalangle ABS| = |\sphericalangle BAS|$ ,  $|\sphericalangle BCS| = |\sphericalangle CBS|$ ,  $|\sphericalangle CAS| = |\sphericalangle ACS|$ .

**Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .....2 pkt**

- Zapisanie miar kątów  $BAS$ ,  $ACS$  i  $CBS$  w zależności od jednej zmiennej, np.:  $|\sphericalangle BAS| = \alpha$ ,  
 $|\sphericalangle CBS| = 2\alpha$  i  $|\sphericalangle ACS| = 3\alpha$

oraz

- wykorzystanie faktu, że co najmniej dwa spośród trójkątów  $ABS$ ,  $BCS$  i  $CAS$  są równoramienne, np.:  $|\sphericalangle ABS| = |\sphericalangle BAS|$ ,  $|\sphericalangle BCS| = |\sphericalangle CBS|$ ,  $|\sphericalangle CAS| = |\sphericalangle ACS|$ .

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania .....3 pkt**

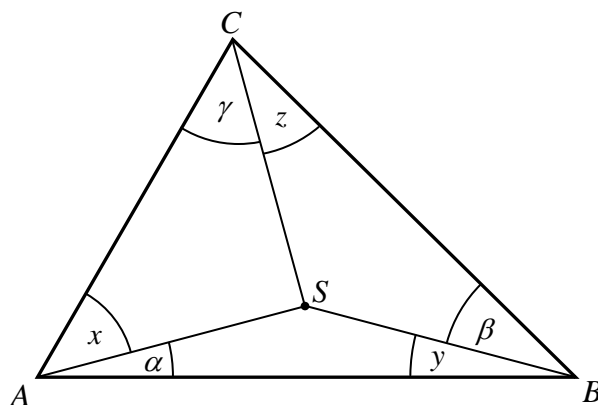
Zapisanie równania z jedną niewiadomą pozwalającego obliczyć miary kątów trójkąta  $ABC$ , np.:  $4\alpha + 3\alpha + 5\alpha = 180^\circ$ .

**Rozwiązanie pełne** .....4 pkt

Obliczenie miar kątów trójkąta  $ABC$ :  $|\sphericalangle BAC| = 60^\circ$ ,  $|\sphericalangle CBA| = 45^\circ$ ,  $|\sphericalangle ACB| = 75^\circ$ .

## II sposób rozwiązania

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.



Ponieważ trójkąt  $ABC$  jest ostrokątny, więc środek okręgu opisanego na tym trójkącie leży wewnątrz tego trójkąta.

Z twierdzenia o kącie środkowym i wpisanym otrzymujemy

$$|\sphericalangle ASB| = 2\gamma + 2z, \quad |\sphericalangle BSC| = 2\alpha + 2x, \quad |\sphericalangle CSA| = 2\beta + 2y.$$

Suma kątów w każdym z trójkątów  $ABS$ ,  $BCS$  i  $CAS$  jest równa  $180^\circ$ , więc otrzymujemy układ równań

$$\alpha + y + (2\gamma + 2z) = 180^\circ \quad \text{i} \quad \beta + z + (2\alpha + 2x) = 180^\circ \quad \text{i} \quad \gamma + x + (2\beta + 2y) = 180^\circ.$$

Ponieważ  $\beta = 2\alpha$  i  $\gamma = 3\alpha$ , więc układ możemy zapisać w postaci

$$\alpha + y + (6\alpha + 2z) = 180^\circ \quad \text{i} \quad 2\alpha + z + (2\alpha + 2x) = 180^\circ \quad \text{i} \quad 3\alpha + x + (4\alpha + 2y) = 180^\circ,$$

$$7\alpha + y + 2z = 180^\circ \quad \text{i} \quad 4\alpha + 2x + z = 180^\circ \quad \text{i} \quad 7\alpha + x + 2y = 180^\circ.$$

Mnożąc strony pierwszego równania przez  $-2$ , drugiego przez  $4$  otrzymujemy

$$-14\alpha - 2y - 4z = -360^\circ \quad \text{i} \quad 16\alpha + 8x + 4z = 720^\circ \quad \text{i} \quad 7\alpha + x + 2y = 180^\circ.$$

Dodając stronami otrzymujemy

$$9\alpha + 9x = 540^\circ,$$

$$\alpha + x = 60^\circ,$$

czyli  $|\sphericalangle ABC| = 60^\circ$ . Zatem  $|\sphericalangle BSC| = 120^\circ$ .

Trójkąt  $BSC$  jest równoramienny, więc  $|\sphericalangle SBC| = |\sphericalangle SCB| = \frac{180^\circ - 120^\circ}{2} = 30^\circ$ , zatem

$2\alpha = 30^\circ$ , czyli  $\alpha = 15^\circ$ . Stąd  $|\sphericalangle CBA| = 45^\circ$ ,  $|\sphericalangle ACB| = 75^\circ$ .

**Schemat oceniania II sposobu rozwiązania**

**Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania .....1 pkt**

- Zapisanie miar kątów  $BAS$ ,  $ACS$  i  $CBS$  w zależności od jednej zmiennej, np.:  $|\sphericalangle BAS| = \alpha$ ,  
 $|\sphericalangle CBS| = 2\alpha$  i  $|\sphericalangle ACS| = 3\alpha$

albo

- wykorzystanie zależności między kątami środkowymi  $ASB$ ,  $BSC$  i  $ASC$  oraz odpowiednimi kątami wpisanymi i zapisanie układu co najmniej trzech równań, np.:

$$\alpha + y + (2\gamma + 2z) = 180^\circ \text{ i } \beta + z + (2\alpha + 2x) = 180^\circ \text{ i } \gamma + x + (2\beta + 2y) = 180^\circ,$$

$$\text{gdzie } x = |\sphericalangle CAS|, y = |\sphericalangle ABS|, z = |\sphericalangle BCS|, \beta = |\sphericalangle CBS|, \gamma = |\sphericalangle ACS|.$$

**Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .....2 pkt**

- Zapisanie miar kątów  $BAS$ ,  $ACS$  i  $CBS$  w zależności od jednej zmiennej, np.:  $|\sphericalangle BAS| = \alpha$ ,  
 $|\sphericalangle CBS| = 2\alpha$  i  $|\sphericalangle ACS| = 3\alpha$

oraz

- wykorzystanie zależności między kątami środkowymi  $ASB$ ,  $BSC$ ,  $ASC$  oraz odpowiednimi kątami wpisanymi i zapisanie układu co najmniej trzech równań z czterema niewiadomymi, np.:

$$\alpha + y + (6\alpha + 2z) = 180^\circ \text{ i } 2\alpha + z + (4\alpha + 2y) = 180^\circ \text{ i } 3\alpha + x + (4\alpha + 2y) = 180^\circ.$$

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania .....3 pkt**

Obliczenie miary kąta  $CAB$ :  $\alpha + x = 60^\circ$ .

**Rozwiązanie pełne .....4 pkt**

Obliczenie miar kątów trójkąta  $ABC$ :  $|\sphericalangle BAC| = 60^\circ$ ,  $|\sphericalangle CBA| = 45^\circ$ ,  $|\sphericalangle ACB| = 75^\circ$ .

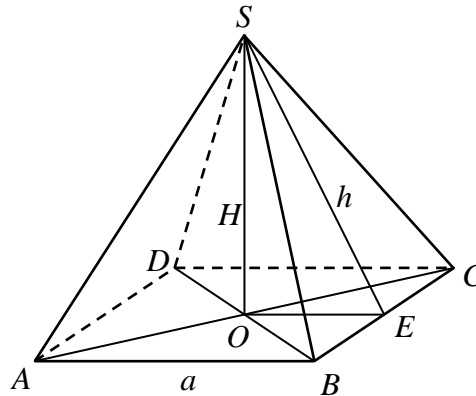
**Zadanie 33. (0–4)**

Pole podstawy ostrosłupa prawidłowego czworokątnego jest równe  $100 \text{ cm}^2$ , a jego pole powierzchni bocznej jest równe  $260 \text{ cm}^2$ . Oblicz objętość tego ostrosłupa.

Użycie i tworzenie strategii	Wyznaczanie związków miarowych w wielościanach. (IV.9.b)
------------------------------	---

**Rozwiązanie**

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.



Pole podstawy ostrosłupa jest równe 100, więc  $a^2 = 100$ . Stąd  $a = 10$ .

Pole powierzchni bocznej jest równe 260, więc  $4 \cdot \frac{1}{2} ah = 260$ . Stąd i z poprzedniego wyniku  
 $2 \cdot 10h = 260$ , więc  $h = 13$ .

Ponieważ trójkąt  $EOS$  jest prostokątny, więc

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{2}a\right)^2 + H^2 &= h^2, \\ 5^2 + H^2 &= 13^2, \\ H^2 &= 144, \\ H &= 12. \end{aligned}$$

Objętość ostrosłupa jest zatem równa

$$V = \frac{1}{3} P_p H = \frac{1}{3} \cdot 100 \cdot 12 = 400.$$

Odpowiedź: Objętość ostrosłupa jest równa  $400 \text{ cm}^3$ .

**Schemat oceniania**

**Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania** .....1 pkt

Zdający obliczy długość krawędzi podstawy ostrosłupa:  $a = 10$ .

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania** .....3 pkt

Zdający obliczy wysokość ostrosłupa:  $H = 12$ .

**Uwaga**

Jeżeli zdający obliczy wysokość ściany bocznej  $h = 13$  i nie traktuje jej jako wysokości ostrosłupa i na tym zakończy, to otrzymuje **2 punkty**. Jeżeli natomiast przyjmuje, że obliczona wysokość ściany bocznej jest wysokością ostrosłupa, to otrzymuje co najwyżej **1 punkt** za całe rozwiązanie.

**Rozwiązanie pełne** .....4 pkt

Zdający obliczy objętość ostrosłupa:  $V = 400 \text{ cm}^3$ .

**Uwagi**

1. Nie zwracamy uwagi na jednostki (zdający może je pominąć).
2. Jeżeli zdający przyjmie, że pole powierzchni bocznej ostrosłupa jest polem powierzchni całkowitej, to może otrzymać co najwyżej **1 punkt** za całe rozwiązanie.



3. Jeżeli zdający przyjmie, że pole powierzchni bocznej ostrosłupa jest polem jednej ściany bocznej i konsekwentnie do tego błędu obliczy objętość ostrosłupa, to może otrzymać co najwyżej **2 punkty** za całe rozwiązanie.

### Zadanie 34. (0–5)

Dwa miasta łączy linia kolejowa o długości 336 kilometrów. Pierwszy pociąg przebył tę trasę w czasie o 40 minut krótszym niż drugi pociąg. Średnia prędkość pierwszego pociągu na tej trasie była o 9 km/h większa od średniej prędkości drugiego pociągu. Oblicz średnią prędkość każdego z tych pociągów na tej trasie.

Modelowanie matematyczne	Rozwiązanie zadania, umieszczonego w kontekście praktycznym, prowadzącego do równania kwadratowego (III.3.b)
--------------------------	--

#### Rozwiązanie

Niech  $v$  oznacza średnią prędkość (w km/h) pierwszego pociągu na tej trasie,  $t$  - czas przejazdu (w godzinach) pierwszego pociągu na tej trasie. Wtedy  $v-9$  oznacza średnią prędkość drugiego pociągu na tej trasie,  $t + \frac{2}{3}$  - czas przejazdu drugiego pociągu na tej trasie.

Zapisujemy układ równań

$$\begin{cases} v \cdot t = 336 \\ (v-9) \left( t + \frac{2}{3} \right) = 336 \end{cases}$$

Z pierwszego równania wyznaczamy  $t = \frac{336}{v}$  i podstawiamy do równania drugiego.

Otrzymujemy równanie z niewiadomą  $v$ , które przekształcamy równoważnie

$$(v-9) \left( \frac{336}{v} + \frac{2}{3} \right) = 336,$$

$$\frac{2}{3}v - \frac{9 \cdot 336}{v} - 6 = 0,$$

$$\frac{2}{3}v^2 - 6v - 9 \cdot 336 = 0 \quad (\text{lub } 2v^2 - 18v - 9072 = 0 \quad \text{lub } v^2 - 9v - 4536 = 0).$$

Równanie to ma dwa rozwiązania

$$v_1 = 72, \quad v_2 = -63 < 0.$$

Drugie z tych rozwiązań odrzucamy (prędkość nie może być ujemna).

Gdy  $v = 72$ , to wtedy  $v-9 = 63$ .

Odpowiedź: Średnia prędkość pierwszego pociągu jest równa 72 km/h, średnia prędkość drugiego pociągu równa się 63 km/h.

**Schemat oceniania**

W poniżej zamieszczonym schemacie używamy niewiadomych  $v$ ,  $t$  oznaczających odpowiednio, prędkość i czas. Oczywiście w pracach maturalnych te niewiadome mogą być oznaczane w inny sposób. Nie wymagamy, aby te niewiadome były wyraźnie opisane na początku rozwiązania, o ile z postaci równań jasno wynika ich znaczenie.

**Rozwiązanie, w którym postęp jest wprawdzie niewielki, ale konieczny na drodze do całkowitego rozwiązania zadania .....1 pkt**

Zdający zapisze równanie, w którym co najmniej jedna z wielkości (prędkość, czas) jest uzależniona od przyjętej niewiadomej, np.:

$$(v-9)\left(t+\frac{2}{3}\right)=336 \text{ albo } (v+9)\left(t-\frac{2}{3}\right)=336.$$

**Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .....2 pkt**

Zdający zapisze układ równań z niewiadomymi  $v$  i  $t$ , np.:

$$v \cdot t = 336 \text{ i } (v-9)\left(t+\frac{2}{3}\right)=336 \text{ albo } v \cdot t = 336 \text{ i } (v+9)\left(t-\frac{2}{3}\right)=336.$$

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania .....3 pkt**

Zdający zapisze równanie z jedną niewiadomą  $v$  lub  $t$ .

$$(v-9)\left(\frac{336}{v}+\frac{2}{3}\right)=336 \text{ albo } \left(\frac{336}{t}-9\right)\left(t+\frac{2}{3}\right)=336$$

$$\text{albo } (v+9)\left(\frac{336}{v}-\frac{2}{3}\right)=336 \text{ albo } \left(\frac{336}{t}+9\right)\left(t-\frac{2}{3}\right)=336.$$

Uwaga

Zdający nie musi zapisywać układu równań, może bezpośrednio zapisać równanie z jedną niewiadomą.

**Rozwiązanie zadania do końca, lecz z usterkami, które jednak nie przekreślają poprawności rozwiązania (np. drobne błędy rachunkowe lub wadliwe przepisanie) .....4 pkt**

- zdający rozwiąże równanie z niewiadomą  $v$  lub  $t$  z błędem rachunkowym i konsekwentnie do popełnionego błędu zapisze prędkości obu pociągów  
albo
- zdający rozwiąże równanie kwadratowe i zapisze prędkość tylko jednego pociągu.

**Rozwiązanie pełne .....5 pkt**

Zdający obliczy średnie prędkości obu pociągów: średnia prędkość pierwszego pociągu równa się 72 km/h, średnia prędkość drugiego pociągu równa się 63 km/h.

Uwagi

1. Oceniamy na **0 punktów** rozwiązania, w których ułożone równania zawierają niezgodność typu wielkości po obu stronach: po jednej stronie prędkość, po drugiej czas lub niezgodność jednostek: prędkość w kilometrach na godzinę, czas w minutach, o ile nie są zapisane jednostki.
2. Jeżeli zdający oznaczy średnią prędkość pierwszego pociągu przez  $v$  (w km/h), a przez  $t$  czas przejazdu pierwszego pociągu na tej trasie, a potem zapisze, że prędkość średnia drugiego pociągu jest równa  $v+9$  i czas przejazdu drugiego pociągu na tej trasie

jest równy  $t - \frac{2}{3}$ , a następnie zapisze układ równań  $v \cdot t = 336$  i  $(v+9) \cdot \left(t - \frac{2}{3}\right) = 336$

i doprowadzi go do równania z jedną niewiadomą, to otrzymuje **1 punkt**. Jeśli rozwiąże to równanie, to otrzymuje **2 punkty**, a jeśli doprowadzi rozwiązanie zadania do końca konsekwentnie do ułożonego układu równań lub przyjętych oznaczeń, to otrzymuje **3 punkty** (otrzymując odpowiednio  $v = 63$  i  $v+9 = 72$  albo  $v = 63$  i  $v-9 = 54$ ).

### **Kryteria oceniania uwzględniające specyficzne trudności w uczeniu się matematyki**

#### **Przykład 1.**

Jeśli zdający przedstawi następujące rozwiązanie:

$v$  - prędkość pierwszego pociągu,  $t$  - czas pokonania całej trasy w godzinach przez pierwszy pociąg

$$v - 9 = \frac{336}{t + \frac{2}{3}}$$

$$\begin{cases} 336 = v \cdot t \\ 336 = (v-9)t + \frac{2}{3} \end{cases}$$

i na tym zakończy, to takie rozwiązanie kwalifikujemy do kategorii **Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp** i przyznajemy **2 punkty**, mimo że w drugim równaniu układu zdający nie ujął wyrażenia  $t + \frac{2}{3}$  w nawias. Zapis równania  $v - 9 = \frac{336}{t + \frac{2}{3}}$  wskazuje na poprawną interpretację zależności między wielkościami.

#### **Przykład 2.**

Jeśli zdający przedstawi następujące rozwiązanie:

$v$  - prędkość pierwszego pociągu,  $t$  - czas pokonania całej trasy w godzinach przez pierwszy pociąg

$$v - 9 = \frac{336}{t + \frac{2}{3}} \quad \begin{cases} v = \frac{336}{t} \\ v - 9 = \frac{336}{t + \frac{2}{3}} \end{cases} \quad \frac{336}{t} - 9 = \frac{336}{t + \frac{2}{3}}$$

i na tym zakończy, to takie rozwiązanie kwalifikujemy do kategorii **Pokonanie zasadniczych trudności zadania** i przyznajemy **3 punkty**, mimo że w równaniu  $\frac{336}{t} - 9 = \frac{336}{t + \frac{2}{3}}$  zdający przestawił cyfry w zapisie liczby 336 i pominął liczbę  $\frac{2}{3}$  w mianowniku ułamka.

#### **Przykład 3.**

Jeśli zdający otrzyma inne równanie kwadratowe, np.  $v^2 + 9v - 4536 = 0$  zamiast równania  $v^2 - 9v - 4536 = 0$  (np. w wyniku złego przepisania znaku lub liczby), konsekwentnie jednak rozwiąże otrzymane równanie kwadratowe, odrzuci ujemne rozwiązanie i pozostawi wynik,

który może być realną prędkością jednego z pociągów, to takie rozwiązanie kwalifikujemy do kategorii **Rozwiązanie pełne** i przyznajemy **5 punktów**.