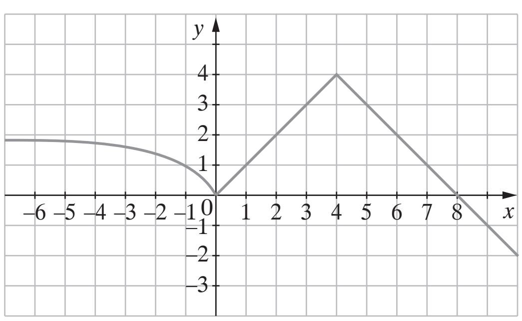
KRYTERIA OCENIANIA ODPOWIEDZI
Próbna Matura z OPERONEM

Matematyka
Poziom rozszerzony

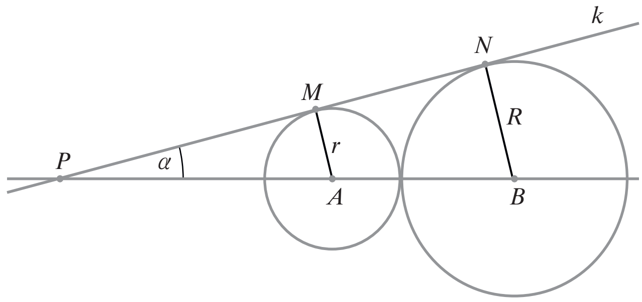
Listopad 2013

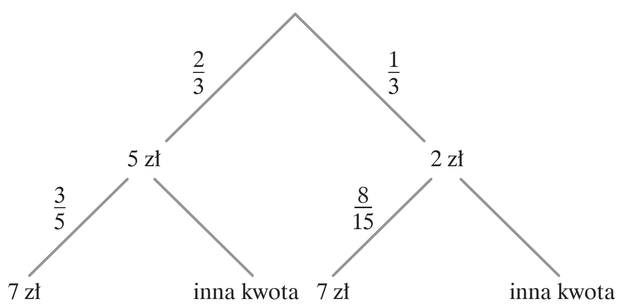
W niniejszym schemacie oceniania zadań otwartych są prezentowane przykładowe poprawne odpowiedzi. W tego typu zadaniach należy również uznać odpowiedzi ucznia, jeśli są inaczej sformułowane, ale ich sens jest zgodny z podanym schematem, oraz inne poprawne odpowiedzi w nim nieprzewidziane.

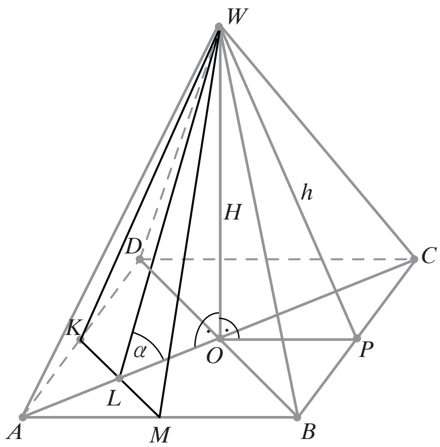
Numer zadania	Modelowe etapy rozwiązywania zadania	Liczba punktów
1.	Postęp: zapisanie tylko warunków: $x_1 \cdot x_2 > 0$ i $x_1 + x_2 > 0$	1 pkt
	Istotny postęp: zapisanie warunków: $\Delta > 0$ i $x_1 \cdot x_2 > 0$ i $x_1 + x_2 > 0$	2 pkt
	Pokonanie zasadniczych trudności: zastosowanie wzorów Viete'a i wyznaczenie: $\Delta = 12m^2 + 5$, $x_1 \cdot x_2 = m^4 + 1$, $x_1 + x_2 = 2m^2 + 3$	3 pkt
	Rozwiązanie bezbłędne: zauważenie, że wszystkie warunki $\Delta = 12m^2 + 5 > 0$, $x_1 \cdot x_2 = m^4 + 1 > 0$, $x_1 + x_2 = 2m^2 + 3 > 0$ zachodzą dla $m \in R$	**4 pkt**
2.	Istotny postęp: poprawne narysowanie każdej części wykresu, niekoniecznie uwzględniając dziedzinę	2 pkt (po 1 pkt za każdą część)
	Pokonanie zasadniczych trudności: sporządzenie całego wykresu funkcji $y = f(x)$ 	3 pkt
	Rozwiązanie bezbłędne: zapisanie 0 rozwiązań dla $m \in (-\infty, 0)$, 1 rozwiąznie dla $m \in (4, +\infty)$, 2 rozwiązania dla $m \in \{0, 4\}$, 3 rozwiązania dla $m \in \langle 2, 4)$, 4 rozwiązania dla $m \in (0, 2)$.	**5 pkt** (4 pkt, jeśli popełniono jeden błąd)

Numer zadania	Modelowe etapy rozwiązywania zadania	Liczba punktów
3.	Postęp: zapisanie: $W(x)=2(x-1)^2(x+2)$	1 pkt
	Istotny postęp: uporządkowanie postaci iloczynowej i porównanie: $2x^3+ax^2+bx+c=2x^3-6x+4$ wyznaczenie: $a=0$, $b=-6$, $c=4$	2 pkt
	Pokonanie zasadniczych trudności: zapisanie wielomianu: $W(x+1)=2x^3+6x^2$	3 pkt
	Rozwiązanie bezbłędne: rozwiązanie nierówności i zapisanie zbioru rozwiązań: $(-\infty, -3)$	**4 pkt**
4.	Postęp: zapisanie: $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$	1 pkt
	Pokonanie zasadniczych trudności: przekształcenie drugiego czynnika: $a^3-b^3=(a-b)\left((a+b)^2-ab\right)$	2 pkt
	Rozwiązanie bezbłędne: stwierdzenie na podstawie założenia, że jeżeli liczby $(a+b)^2$ i ab są podzielne przez k, to ich różnica jest podzielna przez k oraz $a-b$ jest liczbą całkowitą lub zapisanie: $a^3-b^3=(a-b)\left((a+b)^2-ab\right)=(a-b)(k^2p^2-kq)=k(a-b)(kp^2-q)$, gdzie p i q są liczbami całkowitymi oraz $a-b$ i kp^2-q są liczbami całkowitymi	**3 pkt**
5.	Postęp: zapisanie warunków: $\begin{cases}(1)\ \ x+1>0\\(2)\ \ \log_{\frac{1}{3}}(x+1)>0\\(3)\ \ \log_2\left(\log_{\frac{1}{3}}(x+1)\right)\geq 0\end{cases}$	1 pkt
	Pokonanie zasadniczych trudności: rozwiązanie jednego z warunków (2) lub (3) (2) $\log_{\frac{1}{3}}(x+1)>\log_{\frac{1}{3}}1 \Leftrightarrow 0<x+1<1 \Leftrightarrow -1<x<0$ (3) $\log_{\frac{1}{3}}(x+1)\geq 1 \Leftrightarrow 0<x+1\leq \frac{1}{3} \Leftrightarrow -1<x\leq -\frac{2}{3}$	3 pkt (2 pkt, jeśli rozwiązano jeden warunek)
	Rozwiązanie bezbłędne: rozwiązanie układu wszystkich warunków $\begin{cases}x>-1\\-1<x<0\\-1<x\leq -\frac{2}{3}\end{cases}$ i zapisanie: $D=\left(-1, -\frac{2}{3}\right\rangle$	**4 pkt**

Numer zadania	Modelowe etapy rozwiązywania zadania	Liczba punktów
6.	Istotny postęp: zapisanie: $b_{n+1} = 5^{a_{n+1}} = 5^{a_n + r} = 5^{a_n} \cdot 5^r = b_n \cdot 5^r$, $n \in N_+$ i 5^r – liczba	2 pkt (1 pkt, jeśli niewyjaśniono, że 5^r jest liczbą)
	Pokonanie zasadniczych trudności: zapisanie: $b_1 \cdot b_2 \cdot b_3 \cdot \ldots \cdot b_n = 5^{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}$	3 pkt
	Rozwiązanie prawie całkowite: zastosowanie wzorów na *n*-tą sumę częściową	4 pkt
	Rozwiązanie bezbłędne: wyznaczenie $b_1 \cdot b_2 \cdot b_3 \cdot \ldots \cdot b_n = 5^{\frac{3n^2 - n}{2}}$	**5 pkt**
7.	Postęp: zapisanie alternatywy układów: $\begin{cases} \cos x \geq 0 \\ 2\sin x \cos x = \frac{1}{2} \end{cases}$ lub $\begin{cases} \cos x < 0 \\ -2\sin x \cos x = \frac{1}{2} \end{cases}$	1 pkt
	Istotny postęp: zastosowanie wzoru na $\sin 2x$ $\begin{cases} \cos x \geq 0 \\ \sin 2x = \frac{1}{2} \end{cases}$ lub $\begin{cases} \cos x < 0 \\ -\sin 2x = \frac{1}{2} \end{cases}$	2 pkt
	Pokonanie zasadniczych trudności: rozwiązanie równań dla $x \in \langle 0, 2\pi \rangle$: $\sin 2x = \frac{1}{2}$ $x = \frac{\pi}{12}$ lub $x = \frac{5\pi}{12}$, lub $x = \frac{13\pi}{12}$, lub $x = \frac{17\pi}{12}$ $\sin 2x = -\frac{1}{2}$ $x = \frac{7\pi}{12}$ lub $x = \frac{11\pi}{12}$, lub $x = \frac{19\pi}{12}$, lub $x = \frac{23\pi}{12}$	3 pkt
	Rozwiązanie prawie całkowite: poprawne rozwiązanie każdego z układów: $\begin{cases} \cos x \geq 0 \\ x \in \left\{\frac{\pi}{12}, \frac{5\pi}{12}, \frac{13\pi}{12}, \frac{17\pi}{12}\right\} \end{cases}$ lub $\begin{cases} \cos x < 0 \\ x \in \left\{\frac{7\pi}{12}, \frac{11\pi}{12}, \frac{19\pi}{12}, \frac{23\pi}{12}\right\} \end{cases}$ $x \in \left\{\frac{\pi}{12}, \frac{5\pi}{12}\right\}$ lub $x \in \left\{\frac{7\pi}{12}, \frac{11\pi}{12}\right\}$	4 pkt
	Rozwiązanie bezbłędne: zapisanie rozwiązania $x \in \left\{\frac{\pi}{12}, \frac{5\pi}{12}, \frac{7\pi}{12}, \frac{11\pi}{12}\right\}$	**5 pkt**

Numer zadania	Modelowe etapy rozwiązywania zadania	Liczba punktów
8.	Postęp: wykonanie rysunku  lub opis oznaczeń: *P* – punkt przecięcia prostej *k* z prostą *AB* *M* – punkt styczności $o(A, r)$ z prostą *k* *N* – punkt styczności $o(B, R)$ z prostą *k*	1 pkt
	Istotny postęp: zastosowanie twierdzenia Talesa: $\frac{\lvert BN\rvert}{\lvert BP\rvert} = \frac{\lvert AM\rvert}{\lvert AP\rvert}$, $\frac{R}{R+r+a} = \frac{r}{a}$, gdzie $\lvert AP\rvert = a$	2 pkt
	Pokonanie zasadniczych trudności: wyznaczenie $\lvert AP\rvert = a = \frac{(R+r)r}{R-r}$	3 pkt
	Rozwiązanie bezbłędne: wyznaczenie z trójkąta *AMP*: $\sin\alpha = \frac{r}{\lvert AP\rvert} = \frac{R-r}{R+r}$	**4 pkt**
9.	Postęp: oznaczenie wierzchołków trójkąta: $A = (x_A, y_A)$, $B = (x_B, y_B)$, $C = (x_C, y_C)$ i wykorzystanie wzoru na współrzędne środka odcinka: $K = \left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}\right)$, $L = \left(\frac{x_B + x_C}{2}, \frac{y_B + y_C}{2}\right)$ i $M = \left(\frac{x_A + x_C}{2}, \frac{y_A + y_C}{2}\right)$	1 pkt
	Istotny postęp: zapisanie odpowiednich układów równań: $\begin{cases} \frac{x_A + x_B}{2} = 2 \\ \frac{x_B + x_C}{2} = -2 \\ \frac{x_A + x_C}{2} = -1 \end{cases}$ i $\begin{cases} \frac{y_A + y_B}{2} = 2 \\ \frac{y_B + y_C}{2} = 1 \\ \frac{y_A + y_C}{2} = -1 \end{cases}$	2 pkt
	Pokonanie zasadniczych trudności: rozwiązanie układów równań i zapisanie współrzędnych punktów: $A = (3, 0)$, $B = (1, 4)$, $C = (-5, -2)$	3 pkt
	Rozwiązanie bezbłędne: wyznaczenie obrazów punktów *A*, *B*, *C* symetrii środkowej względem początku układu współrzędnych $A' = (-3, 0)$, $B' = (-1, -4)$, $C' = (5, 2)$	**4 pkt**

Numer zadania	Modelowe etapy rozwiązywania zadania	Liczba punktów
10.	Postęp: zastosowanie twierdzenia sinusów do trójkąta *ABC* i obliczenie $\sin(\sphericalangle ABC) = \frac{3}{5}$	1 pkt
	Istotny potęp: obliczenie $\cos(\sphericalangle ABC) = \frac{4}{5}$, $\sphericalangle ABC$ – kąt ostry	2 pkt
	Pokonanie zasadniczych trudności: zastosowanie twierdzenia cosinusów do trójkąta *ABK* $\lvert AK\rvert^2 = 10^2 + 2^2 - 2\cdot 2\cdot 10\cdot \frac{4}{5}$	3 pkt
	Rozwiązanie bezbłędne: obliczenie $\lvert AK\rvert = 6\sqrt{2}$	**4 pkt**
11.	Postęp: obliczenie prawdopodobieństwa wylosowania z zielonego pudełka 5 zł oraz 2 zł $P(B_1) = \frac{2}{3}$ $P(B_2) = \frac{1}{3}$	1 pkt
	Istotny postęp: obliczenie prawdopodobieństw przy losowaniu z białego pudełka $p_1 = \frac{\binom{3}{1}\binom{3}{1}}{\binom{6}{2}} = \frac{3}{5}$ $p_2 = \frac{\binom{2}{1}\binom{4}{1}}{\binom{6}{2}} = \frac{8}{15}$	2 pkt
	Pokonanie zasadniczych trudności: narysowanie drzewka i podpisanie odpowiednich gałęzi  Uwaga: Jeżeli uczeń od razu narysował drzewko odpowiadające opisanej w zadaniu sytuacji i poprawnie wpisał prawdopodobieństwa na potrzebnych gałęziach, to również otrzymuje 3 pkt.	3 pkt
	Rozwiązanie bezbłędne: obliczenie: $\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{5} + \frac{1}{3}\cdot\frac{8}{15} = \frac{26}{45}$	**4 pkt**

Numer zadania	Modelowe etapy rozwiązywania zadania	Liczba punktów
12.	Postęp: sporządzenie poprawnego rysunku z oznaczeniami: *OW* – wysokość bryły, *LW* – wysokość trójkąta powstałego w przekroju  lub opisanie oznaczeń bez rysunku i wyjaśnienie, że kąt α jest wyznaczony przez wysokość przekroju i przekątną podstawy	1 pkt
	Istotny postęp: wyznaczenie długości odcinka *OL*: $\|OL\| = \frac{a\sqrt{2}}{4}$	2 pkt
	Pokonanie zasadniczych trudności: wyznaczenie z trójkąta *OLW* długości wysokości ostrosłupa: $H = \|OW\| = \frac{a\sqrt{2}}{4} \cdot \mathrm{tg}\alpha$	3 pkt
	Rozwiązanie bezbłędne: wyznaczenie objętości ostrosłupa: $V = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}\mathrm{tg}\alpha$	**4 pkt**