KRYTERIA OCENIANIA ODPOWIEDZI
Próbna Matura z OPERONEM

Matematyka
Poziom rozszerzony

Listopad 2014

Zadania zamknięte

Za każdą poprawną odpowiedź zdający otrzymuje 1 punkt.

Numer zadania	Poprawna odpowiedź	Wskazówki do rozwiązania zadania
1.	A	$\lvert 3x+6\rvert > 6 \Leftrightarrow 3x+6 < -6 \vee 3x+6 > 6 \Leftrightarrow x < -4 \vee x > 0$
2.	A	$W(-3) = -54 - 36 + 45 - 12 = -57$
3.	B	$\log_2 7 + \frac{\log_2 7}{\log_2 8} = \log_2 7 + \frac{\log_2 7}{3} = \frac{4\log_2 7}{3}$
4.	A	$W = 8x^3 + 12x^2 + 6x + 1 - \left(x^3 - 3x^2 + 3x - 1\right) = 7x^3 + 15x^2 + 3x + 2$
5.	D	$(x+5)^2 + (y-2)^2 = 4 \Rightarrow S = (-5,2),\ r = 2$

Zadania otwarte – kodowane

Numer zadania	Poprawna odpowiedź	Wskazówki do rozwiązania zadania	Liczba punktów
6.	4 1 9	$a_2 = \frac{32}{7} + 2 = \frac{46}{7},\ a_3 = \frac{46}{49} + 2 = \frac{144}{49}$ $a_4 = \frac{144}{343} + 2 = \frac{830}{343} = 2{,}419825\ldots \approx 2{,}4198$	0–2
7.	5 6 5	$\frac{4}{\sin 30^\circ} = \frac{b}{\sin 45^\circ} \Rightarrow b = 4\sqrt{2} = 5{,}656854\ldots \approx 5{,}657$	0–2
8.	7 6 0	$l: 2x - y + 1 = 0,\ d(A, l) = \frac{\lvert 10+6+1\rvert}{\sqrt{5}} = \frac{17\sqrt{5}}{5} = 7{,}602631\ldots \approx 7{,}60$	0–2
9.	8 9 9	Jeśli *ABCD* jest podstawą dolną sześcianu, *BDE* – przekrojem, $OE = h$ – wysokością przekroju, *O* – punktem przecięcia przekątnych kwadratu *ABCD*, to: $\lvert BD\rvert = 6\sqrt{2},\ \lvert OC\rvert = 3\sqrt{2},\ \frac{\lvert OC\rvert}{h} = \cos 30^\circ \Rightarrow h = 2\sqrt{6} = 4{,}898979\ldots \approx$ $\approx 4{,}899$	0–2
10.	2 7 3	$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{(n+4)(3n^2-1)}{11n^3+5n+2} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\left(1+\frac{4}{n}\right)\left(3-\frac{1}{n^2}\right)}{11+\frac{5}{n^2}+\frac{2}{n^3}} = \frac{3}{11} = 0{,}(27) \approx 0{,}273$	0–2

Zadania otwarte

Numer zadania	Modelowe etapy rozwiązywania zadania	Liczba punktów
11.	Rozwiązanie: $\sin 3x + \sin 9x = 0 \Rightarrow 2\sin 6x \cos 3x = 0 \Rightarrow \sin 6x = 0 \vee \cos 3x = 0$ $\Rightarrow x = \frac{k\pi}{6} \vee x = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3} \wedge k \in C \wedge x \in \langle 0, \pi\rangle \Rightarrow x \in \left\{0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}, \frac{5\pi}{6}, \pi\right\}$	0–3
	Istotny postęp: Przekształcenie równania do alternatywy dwóch równań: $\sin 6x = 0 \vee \cos 3x = 0$	1
	Pokonanie zasadniczych trudności: Zapisanie rozwiązań w postaci ogólnej: $x = \frac{k\pi}{6} \vee x = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3}$, gdzie $k \in C$	2
	Rozwiązanie pełne: Zapisanie odpowiedzi uwzględniającej założenie: $x \in \left\{0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}, \frac{5\pi}{6}, \pi\right\}$	3
12.	Rozwiązanie: $x\left(x^2 - 4x - 5\right) < 0$ $x_1 = 0,\ x_2 = -1,\ x_3 = 5$ $x\left(x^2 - 4x - 5\right) < 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -1) \cup (0, 5)$	0–3
	Istotny postęp: Zapisanie nierówności w postaci: $x\left(x^2 - 4x - 5\right) < 0$	1
	Pokonanie zasadniczych trudności: Wyznaczenie pierwiastków: $x_1 = 0,\ x_2 = -1,\ x_3 = 5$	2
	Rozwiązanie pełne: Rozwiązanie nierówności: $x\left(x^2 - 4x - 5\right) < 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -1) \cup (0, 5)$	3
13.	Rozwiązanie: $f'(x) = \frac{-16x}{\left(x^2 - 1\right)^2}$, $f'(x) = 0$, $\frac{-16x}{\left(x^2 - 1\right)^2} = 0 \Rightarrow x = 0$ Badamy znaki pochodnej i zapisujemy odpowiedź: w punkcie $x = 0$ funkcja osiąga maksimum.	0–3
	Istotny postęp: Wyznaczenie pochodnej funkcji: $f'(x) = \frac{-16x}{\left(x^2 - 1\right)^2}$	1
	Pokonanie zasadniczych trudności: Wyznaczenie miejsc zerowych pochodnej i określenie znaków pochodnej: $\frac{-16x}{\left(x^2 - 1\right)^2} = 0 \Rightarrow x = 0$, pochodna dodatnia dla $x \in (-\infty, -1) \cup (-1, 0)$, pochodna ujemna dla $x \in (0, 1) \cup (1, +\infty)$	2
	Rozwiązanie pełne: Zapisanie odpowiedzi: w punkcie $x = 0$ funkcja osiąga maksimum.	3

Numer zadania	Modelowe etapy rozwiązywania zadania	Liczba punktów
14.	Rozwiązanie: Niech ABC będzie danym trójkątem, CD – środkową trójkąta i $E \in CD$, $P \in BC$. Rysujemy prostą równoległą do odcinka BC przechodzącą przez punkt A oraz prostą równoległą do odcinka AC przechodzącą przez punkt B. Punkt przecięcia prostych – punkt F. Wtedy $\|CE\| = x$, $\|ED\| = 3x$, $\|DF\| = 4x$. Oznaczamy ponadto: $\|CP\| = y$, $\|PB\| = z$, więc $\|AF\| = \|BC\| = y + z$ Zauważamy, że trójkąty CEP i EAF są podobne, zatem: $\frac{y}{y+z} = \frac{x}{7x} \Rightarrow 6y = z \Rightarrow \frac{y}{z} = \frac{1}{6}$	0–5
	Postęp: Wykonanie rysunku z oznaczeniami: ABC – dany trójkąt, CD – środkowa trójkąta, $E \in CD, P \in BC$. Narysowanie odcinka AF równoległego do BC oraz odcinka BF równoległego do AC.	1
	Istotny postęp: Zapisanie, że $\|CE\| = x$, $\|ED\| = 3x$, $\|DF\| = 4x$, $\|CP\| = y$, $\|PB\| = z$, $\|AF\| = \|BC\| = y + z$	3 (2 pkt, jeśli nie zapisano, że $\|AF\| = \|BC\| = y + z$)
	Pokonanie zasadniczych trudności: Zauważenie, że trójkąty CEP i EAF są podobne.	4
	Rozwiązanie pełne: Wykazanie tezy zadania: $\frac{y}{y+z} = \frac{x}{7x} \Rightarrow 6y = z \Rightarrow \frac{y}{z} = \frac{1}{6}$, co należało dowieść.	5
15.	Rozwiązanie: Zapisujemy układ: $\begin{cases} \frac{a_1}{1-q} = 8 \\ \frac{a_1^3}{1-q^3} = \frac{512}{7} \end{cases} \wedge \|q\| < 1$, po jego rozwiązaniu otrzymujemy: $\begin{cases} q = \frac{1}{2} \\ a_1 = 4 \end{cases}$ lub $\begin{cases} q = 2 \\ a_1 = -8 \end{cases}$. Drugi układ jest sprzeczny z warunkiem $\|q\| < 1$.	0–5
	Istotny postęp: Zapisanie układu równań: $\begin{cases} \frac{a_1}{1-q} = 8 \\ \frac{a_1^3}{1-q^3} = \frac{512}{7} \end{cases} \wedge \|q\| < 1$	2 (1 pkt, gdy zapisano tylko jedno równanie)
	Pokonanie zasadniczych trudności: Przekształcenie układu do równania kwadratowego, np.: $2q^2 - 5q + 2 = 0$	3
	Rozwiązanie prawie całkowite: Rozwiązanie układu równań: $\begin{cases} q = \frac{1}{2} \\ a_1 = 4 \end{cases}$ lub $\begin{cases} q = 2 \\ a_1 = -8 \end{cases}$	4
	Rozwiązanie pełne: Wybór rozwiązania i odpowiedzi: $\begin{cases} q = \frac{1}{2} \\ a_1 = 4 \end{cases}$	5

Numer zadania	Modelowe etapy rozwiązywania zadania	Liczba punktów
16.	Rozwiązanie: Liczba liczb z „1” na pierwszym miejscu: $\binom{5}{2}\cdot 8^3$ Liczba liczb z „2” na pierwszym miejscu: $5\cdot 4\cdot 8^3$ Liczba liczb z cyfrą inną niż „1”, „2” na pierwszym miejscu: $7\cdot\binom{5}{2}\cdot 3\cdot 8^2$ Suma: $\binom{5}{2}\cdot 8^3+5\cdot 4\cdot 8^3+7\cdot\binom{5}{2}\cdot 3\cdot 8^2=28800$	0–4
	Istotny postęp: Zapisanie liczby możliwości z cyfrą „1” na pierwszym miejscu: $\binom{5}{2}\cdot 8^3$	1
	Pokonanie zasadniczych trudności: Zapisanie liczby możliwości z cyfrą „2” na pierwszym miejscu: $5\cdot 4\cdot 8^3$	2
	Rozwiązanie prawie całkowite: Zapisanie liczby możliwości z cyfrą inną niż „1” lub „2” na pierwszym miejscu: $7\cdot\binom{5}{2}\cdot 3\cdot 8^2$	3
	Rozwiązanie pełne: Wyznaczenie sumy wszystkich liczb: $\binom{5}{2}\cdot 8^3+5\cdot 4\cdot 8^3+7\cdot\binom{5}{2}\cdot 3\cdot 8^2=28800$	4
17.	Rozwiązanie: $18=6a+3h\Rightarrow h=6-2a$, $V=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}\cdot h$, $V=\frac{\sqrt{3}}{4}\left(6a^2-2a^3\right)$, $a\in(0,3)$ $V'(h)=\frac{\sqrt{3}}{4}\left(12a-6a^2\right)$, $V'=0\Leftrightarrow a=0\vee a=2$. Analizując znaki pochodnej, otrzymujemy: w punkcie $a=2$ funkcja osiąga maksimum.	0–7
	I część Wyznaczenie wzoru funkcji określającej objętość ostrosłupa: Zapisanie związku między krawędzią boczną i krawędzią podstawy: $h=6-2a$	1
	Wyznaczenie wzoru na objętość ostrosłupa: $V(a)=\frac{\sqrt{3}}{4}\left(6a^2-2a^3\right)$	2
	Wyznaczenie dziedziny funkcji: $a\in(0,3)$	3 (za I część przyznaje się 3 pkt)
	II część – Zbadanie pochodnej i wyznaczenie ekstremum Wyznaczenie wzoru pochodnej funkcji: $V'(a)=\frac{\sqrt{3}}{4}\left(12a-6a^2\right)$	4
	Wyznaczenie miejsc zerowych pochodnej: $V'=0\Leftrightarrow a=0\vee a=2$	5
	Zbadanie znaków pochodnej i zapisanie wniosku dotyczącego maksimum funkcji: $V'(a)>0$ dla $a\in(0,2)$, $V'(a)<0$ dla $a\in(2,3)$, zatem funkcja rośnie w przedziale $(0,2)$, maleje w $(2,3)$, stąd w punkcie $a=2$ funkcja osiąga maksimum będące jednocześnie największą wartością funkcji.	6 (za II część przyznaje się 3 pkt)
	III część – Wyznaczenie największej wartości funkcji $V(2)=2\sqrt{3}$	1 (za III część przyznaje się 1 pkt)

Numer zadania	Modelowe etapy rozwiązywania zadania	Liczba punktów
18.	Rozwiązanie: Badamy sytuację, gdy funkcja jest liniowa: $m=1 \Rightarrow f(x)=-1$, zatem nie ma miejsc zerowych. Badamy sytuację, gdy funkcja jest kwadratowa: $m \neq 1$ Wyznaczamy zbiór, dla którego istnieją dwa różne pierwiastki trójmianu kwadratowego: $\Delta < 0 \Leftrightarrow m \in (-\infty, 1) \cup \left(\frac{11}{7}, +\infty\right)$ $\Delta = 0 \Leftrightarrow m = \frac{11}{7}$ $\Delta > 0 \Leftrightarrow m \in \left(1, \frac{11}{7}\right)$ Zapisujemy wzór funkcji: $g(m)=\begin{cases} 0 & \text{dla } m \in (-\infty, 1\rangle \cup \left(\frac{11}{7}, +\infty\right) \\ 1 & \text{dla } m \in \left\{\frac{11}{7}\right\} \\ 2 & \text{dla } m \in \left(1, \frac{11}{7}\right) \end{cases}$ i rysujemy wykres.	0–5
	Postęp: Zapisanie i rozwiązanie warunku: $a=0 \Rightarrow m=1$ – nie ma miejsc zerowych.	1
	Pokonanie zasadniczych trudności: Zapisanie i rozwiązanie warunku dla $m \neq 1$: $\Delta < 0 \Leftrightarrow m \in (-\infty, 1) \cup \left(\frac{11}{7}, +\infty\right)$ $\Delta = 0 \Leftrightarrow m = \frac{11}{7}$ $\Delta > 0 \Leftrightarrow m \in \left(1, \frac{11}{7}\right)$	3 (2 pkt, jeśli popełniono błąd rachunkowy)
	Rozwiązanie prawie całkowite: Zapisanie wzoru funkcji g : $g(m)=\begin{cases} 0 & \text{dla } m \in (-\infty, 1\rangle \cup \left(\frac{11}{7}, +\infty\right) \\ 1 & \text{dla } m \in \left\{\frac{11}{7}\right\} \\ 2 & \text{dla } m \in \left(1, \frac{11}{7}\right) \end{cases}$	4
	Rozwiązanie pełne: Narysowanie wykresu funkcji g.	5