

**EGZAMIN MATURALNY  
W ROKU SZKOLNYM 2014/2015**

**FORMUŁA OD 2015  
(„NOWA MATURA”)**

**MATEMATYKA  
POZIOM PODSTAWOWY**

**ZASADY OCENIANIA ROZWIĄZAŃ ZADAŃ  
ARKUSZ MMA-P1**

## Klucz punktowania zadań zamkniętych

Nr zad.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
Odp.	D	D	B	C	D	D	C	B	A	C	D	C	B	A	A	B	C	C	C	A	B	A	A	B	D

## Schemat oceniania zadań otwartych

### Zadanie 26. (0–2)

Rozwiąż nierówność  $3x^2 - 9x \leq x - 3$ .

#### Rozwiązanie

Rozwiązanie nierówności kwadratowej składa się z dwóch etapów.

**Pierwszy etap może być realizowany na 2 sposoby.**

#### I sposób rozwiązania (realizacja pierwszego etapu)

Zapisujemy trójmian w postaci  $3x^2 - 10x + 3$  i znajdujemy jego pierwiastki

- obliczamy wyróżnik tego trójmianu:

$$\Delta = 100 - 4 \cdot 3 \cdot 3 = 64 \quad \text{i stąd} \quad x_1 = \frac{10-8}{6} = \frac{1}{3} \quad \text{oraz} \quad x_2 = \frac{10+8}{6} = 3$$

albo

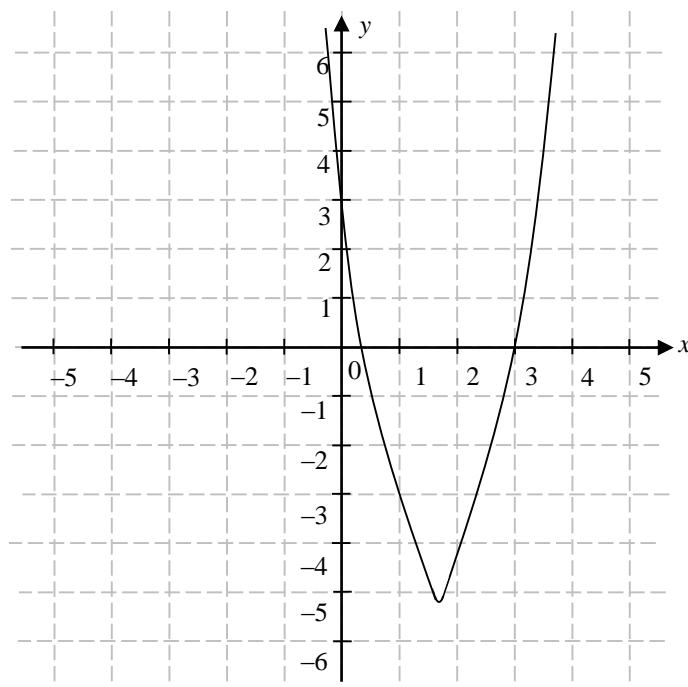
- stosujemy wzory Viète'a:

$$x_1 \cdot x_2 = 1 \quad \text{oraz} \quad x_1 + x_2 = \frac{10}{3}, \quad \text{stąd} \quad x_1 = 3 \quad \text{oraz} \quad x_2 = \frac{1}{3}$$

albo

- podajemy je bezpośrednio, np. zapisując pierwiastki trójmianu lub postać iloczynową trójmianu, lub zaznaczając je na wykresie

$$x_1 = 3, \quad x_2 = \frac{1}{3} \quad \text{lub} \quad (x-3)(3x-1) \quad \text{lub} \quad 3(x-3)\left(x-\frac{1}{3}\right) \quad \text{lub}$$



**II sposób rozwiązania** (realizacja pierwszego etapu)

Wyznaczamy postać kanoniczną trójmianu kwadratowego  $3x^2 - 10x + 3$  i zapisujemy nierówność w postaci, np.

$$3\left(x - \frac{5}{3}\right)^2 - \frac{16}{3} \leq 0, \text{ stąd } 3\left[\left(x - \frac{5}{3}\right)^2 - \frac{16}{9}\right] \leq 0,$$

a następnie

- przekształcamy nierówność tak, aby jej lewa strona była zapisana w postaci iloczynu

$$3\left[\left(x - \frac{5}{3}\right) - \frac{4}{3}\right] \cdot \left[\left(x - \frac{5}{3}\right) + \frac{4}{3}\right] \leq 0,$$

$$3\left(x - \frac{9}{3}\right)\left(x - \frac{1}{3}\right) \leq 0,$$

albo

- przekształcamy nierówność do postaci równoważnej, korzystając z własności wartości bezwzględnej

$$\left(x - \frac{5}{3}\right)^2 \leq \frac{16}{9},$$

$$\left|x - \frac{5}{3}\right| \leq \frac{4}{3}.$$

**Drugi etap rozwiązania:**

Podajemy zbiór rozwiązań nierówności:  $\left\langle \frac{1}{3}, 3 \right\rangle$  lub  $x \in \left\langle \frac{1}{3}, 3 \right\rangle$ .

**Schemat oceniania**

**Zdający otrzymuje ..... 1 pkt**  
gdy:

- zrealizuje pierwszy etap rozwiązania i na tym poprzestanie lub błędnie zapisze zbiór rozwiązań nierówności, np.
  - obliczy lub poda pierwiastki trójmianu kwadratowego  $x_1 = 3$ ,  $x_2 = \frac{1}{3}$  i na tym poprzestanie lub błędnie zapisze zbiór rozwiązań nierówności,
  - zaznaczy na wykresie miejsca zerowe funkcji  $f(x) = 3x^2 - 10x + 3$  i na tym poprzestanie lub błędnie zapisze zbiór rozwiązań nierówności,
  - rozłoży trójmian kwadratowy  $3x^2 - 10x + 3$  na czynniki liniowe, np.  $3(x - 3)\left(x - \frac{1}{3}\right)$  i na tym poprzestanie lub błędnie rozwiąże nierówność,
  - zapisze nierówność  $\left|x - \frac{5}{3}\right| \leq \frac{4}{3}$  i na tym poprzestanie lub błędnie zapisze zbiór rozwiązań nierówności,

albo

- realizując pierwszy etap popełni błąd (ale otrzyma dwa różne pierwiastki) i konsekwentnie do tego rozwiąże nierówność, np.
  - popełni błąd rachunkowy przy obliczaniu wyróżnika lub pierwiastków trójmianu kwadratowego i konsekwentnie do popełnionego błędu rozwiąże nierówność,

- błędnie zapisze równania wynikające ze wzorów Viète’a, np.:  $x_1 + x_2 = -\frac{10}{3}$  i konsekwentnie do popełnionego błędu rozwiąże nierówność,
- błędnie zapisze nierówność, np.  $\left|x + \frac{5}{3}\right| \leq \frac{4}{3}$  i konsekwentnie do popełnionego błędu rozwiąże nierówność.

**Zdający otrzymuje ..... 2 pkt**  
gdy:

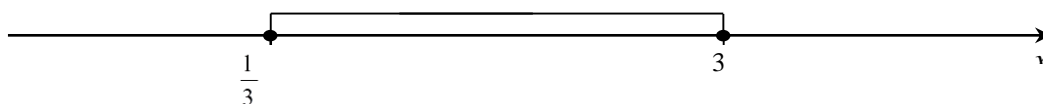
- poda zbiór rozwiązań nierówności:  $\left\langle \frac{1}{3}, 3 \right\rangle$  lub  $x \in \left\langle \frac{1}{3}, 3 \right\rangle$

albo

- sporządzi ilustrację geometryczną (oś liczbowa, wykres) i zapisze zbiór rozwiązań nierówności w postaci:  $\frac{1}{3} \leq x \leq 3$

albo

- poda zbiór rozwiązań nierówności w postaci graficznej z poprawnie zaznaczonymi końcami przedziałów



### **Uwaga**

Jeżeli zdający poprawnie obliczy pierwiastki trójmianu  $x_1 = 3$ ,  $x_2 = \frac{1}{3}$  i zapisze, np.

$x \in \left\langle -\frac{1}{3}, 3 \right\rangle$ , popełniając tym samym błąd przy przepisywaniu jednego z pierwiastków, to za takie rozwiązanie otrzymuje **2 punkty**.

### **Zadanie 27. (0–2)**

Rozwiąż równanie  $x(x^2 - 2x + 3) = 0$ .

### **Rozwiązanie**

#### **I sposób rozwiązania**

Z własności iloczynu otrzymujemy  $x = 0$  lub  $x^2 - 2x + 3 = 0$ .

Równanie kwadratowe nie ma rozwiązań, ponieważ wyróżnik trójmianu  $x^2 - 2x + 3$  jest ujemny ( $\Delta = -8$ ).

Zatem jedynym rozwiązaniem równania jest  $x = 0$ .

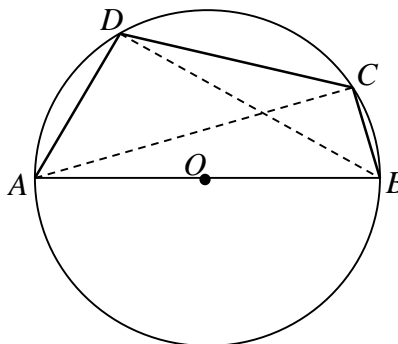
**Schemat oceniania I sposobu rozwiązania**

**Zdający otrzymuje ..... 1 pkt**  
gdy poda rozwiązanie  $x = 0$  i na tym poprzestanie lub popełni błąd przy rozwiązywaniu równania  $x^2 - 2x + 3 = 0$ .

**Zdający otrzymuje ..... 2 pkt**  
gdy wyznaczy bezbłędnie rozwiązanie równania:  $x = 0$  i poprawnie uzasadni, że równanie nie ma innych rozwiązań, np. przez wyznaczenie ujemnego wyróżnika trójmianu  $x^2 - 2x + 3$ .

**Zadanie 28. (0–2)**

Czworokąt  $ABCD$  wpisano w okrąg tak, że bok  $AB$  jest średnicą tego okręgu (zobacz rysunek). Udowodnij, że  $|AD|^2 + |BD|^2 = |BC|^2 + |AC|^2$ .



**Dowód**

Kąt  $ADB$  jest prosty, jako kąt wpisany w okrąg oparty na jego średnicy.

Podobnie stwierdzamy, że kąt  $ACB$  jest prosty.

Z twierdzenia Pitagorasa dla tych trójkątów prostokątnych otrzymujemy

$$|AB|^2 = |AD|^2 + |BD|^2 \text{ oraz } |AB|^2 = |AC|^2 + |BC|^2.$$

Porównując prawe strony tych równości otrzymujemy tezę. To kończy dowód.

**Schemat oceniania**

**Zdający otrzymuje..... 1 pkt**  
gdy zauważy, że kąty  $ADB$  i  $ACB$  są proste, wykorzysta twierdzenie Pitagorasa i zapisze równości:  $|AB|^2 = |AD|^2 + |BD|^2$ ,  $|AB|^2 = |AC|^2 + |BC|^2$  i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy.

**Zdający otrzymuje..... 2 pkt**  
gdy uzasadni równość.

**Zadanie 29. (0–2)**

Udowodnij, że dla dowolnych liczb rzeczywistych  $x$ ,  $y$  prawdziwa jest nierówność  $3x^2 + 5y^2 - 4xy \geq 0$ .

**I sposób rozwiązania**

Nierówność  $3x^2 + 5y^2 - 4xy \geq 0$  przekształcamy w sposób równoważny

$$x^2 - 4xy + 4y^2 + 2x^2 + y^2 \geq 0,$$

$$(x - 2y)^2 + 2x^2 + y^2 \geq 0.$$

Ta nierówność jest prawdziwa dla dowolnych liczb rzeczywistych  $x$  i  $y$ , gdyż kwadrat każdej liczby rzeczywistej jest nieujemny i suma kwadratów liczb nieujemnych również jest nieujemna.

Uwaga!

Nierówność  $3x^2 + 5y^2 - 4xy \geq 0$  możemy przekształcić w sposób równoważny w nieco inny sposób:

$$2x^2 - 4xy + 2y^2 + x^2 + 3y^2 \geq 0,$$

$$2(x^2 - 2xy + y^2) + x^2 + 3y^2 \geq 0$$

$$2(x - y)^2 + x^2 + 3y^2 \geq 0.$$

Ta nierówność jest prawdziwa dla dowolnych liczb rzeczywistych  $x$  i  $y$ , gdyż kwadrat każdej liczby rzeczywistej jest nieujemny i suma kwadratów liczb nieujemnych również jest nieujemna.

To kończy dowód.

**Schemat oceniania I sposobu rozwiązania**

**Zdający otrzymuje ..... 1 pkt**

gdy zapisze nierówność w postaci równoważnej

- $(x - 2y)^2 + 2x^2 + y^2 \geq 0$

albo

- $2(x - y)^2 + x^2 + 3y^2 \geq 0$

i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy.

**Zdający otrzymuje ..... 2 pkt**

gdy zapisze nierówność w postaci równoważnej  $(x - 2y)^2 + 2x^2 + y^2 \geq 0$  lub

$2(x - y)^2 + x^2 + 3y^2 \geq 0$  i uzasadni jej prawdziwość.

**II sposób rozwiązania**

Nierówność  $3x^2 - 4xy + 5y^2 \geq 0$  możemy potraktować, jak nierówność kwadratową z niewiadomą  $x$ . Wyróżnik trójmianu po lewej stronie nierówności jest równy

$$\Delta = (-4y)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (5y^2) = -44y^2 \leq 0.$$

Stąd i z faktu, że współczynnik przy  $x^2$  trójmianu  $f(x) = 3x^2 - 4xy + 5y^2$  jest dodatni wynika, że trójmian ten przyjmuje tylko wartości nieujemne. To kończy dowód.

**Schemat oceniania II sposobu**

**Zdający otrzymuje ..... 1 pkt**

gdy wyznaczy wyróżnik trójmianu  $f(x) = 3x^2 - 4xy + 5y^2$ :  $\Delta = -44y^2$  i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy.

**Zdający otrzymuje ..... 2 pkt**

gdy wyznaczy wyróżnik trójmianu  $f(x) = 3x^2 - 4xy + 5y^2$ , zapisze, że jest on niedodatni i wyciągnie wniosek, że trójmian przyjmuje tylko wartości nieujemne.

**Zadanie 30. (0–2)**

Funkcja kwadratowa  $f$  dla  $x = -3$  przyjmuje wartość największą równą 4. Do wykresu funkcji  $f$  należy punkt  $A = (-1, 3)$ . Zapisz wzór funkcji kwadratowej  $f$ .

**I sposób rozwiązania**

Wykorzystując fakt, że dla  $x = -3$  funkcja kwadratowa  $f$  przyjmuje wartość największą równą 4, możemy zapisać:  $f(x) = a \cdot (x+3)^2 + 4$ .

Punkt  $A = (-1, 3)$  należy do wykresu funkcji, zatem możemy obliczyć wartość współczynnika

$$a: a \cdot (-1+3)^2 + 4 = 3, \text{ stąd } a = -\frac{1}{4}.$$

Zapisujemy wzór funkcji  $f$  w postaci  $f(x) = -\frac{1}{4} \cdot (x+3)^2 + 4$ .

**Schemat oceniania I sposobu rozwiązania**

**Zdający otrzymuje .....1 p.**

gdy

- Zapisze wzór funkcji, w którym nieznanym jest tylko współczynnik stojący przy  $x^2$ , np.  $f(x) = a \cdot (x+3)^2 + 4$ ,

albo

- popełni błąd rachunkowy przy obliczeniu współczynnika  $a$  i konsekwentnie do popełnionego błędu zapisze wzór funkcji kwadratowej  $f$ .

**Zdający otrzymuje .....2 p.**

gdy zapisze wzór funkcji kwadratowej  $f$  : np.  $f(x) = -\frac{1}{4} \cdot (x+3)^2 + 4$ .

## II sposób rozwiązania

Funkcja kwadratowa może być opisana wzorem  $f(x) = ax^2 + bx + c$ .

Wykorzystując fakt, że funkcja kwadratowa  $f$  przyjmuje wartość największą dla  $x = -3$ , możemy zapisać:  $\frac{-b}{2a} = -3$ .

Stąd  $b = 6a$ , czyli  $f(x) = ax^2 + 6ax + c$ .

Punkt  $W = (-3, 4)$  należy do wykresu funkcji, zatem możemy zapisać:  $4 = 9a - 18a + c$

Stąd  $c = 9a + 4$ , czyli  $f(x) = ax^2 + 6ax + 9a + 4$ .

Punkt  $A = (-1, 3)$  należy do wykresu funkcji, zatem możemy obliczyć wartość

współczynnika  $a$ :  $a - 6a + 9a + 4 = 3$ , stąd  $a = -\frac{1}{4}$ .

Wyznaczamy wartości  $b$  i  $c$ :  $b = -\frac{6}{4}$ ,  $c = \frac{7}{4}$

Zapisujemy wzór funkcji  $f$ :  $f(x) = -\frac{1}{4}x^2 - \frac{6}{4}x + \frac{7}{4}$ .

### Schemat oceniania II sposobu rozwiązania

**Zdający otrzymuje .....1 p.**  
gdy

- Zapisze wzór funkcji, w którym nieznanym jest tylko jeden współczynnik trójmianu kwadratowego  $f(x) = ax^2 + bx + c$ , np.  $f(x) = ax^2 + 6ax + 9a + 4$ ,

albo

- popełni błędy rachunkowe przy obliczeniu współczynników  $a$ ,  $b$ ,  $c$  i konsekwentnie do popełnionych błędów zapisze wzór funkcji kwadratowej  $f$ .

**Zdający otrzymuje .....2 p.**

gdy zapisze wzór funkcji kwadratowej  $f$ : np.  $f(x) = -\frac{1}{4}x^2 - \frac{6}{4}x + \frac{7}{4}$ .



**Zadanie 31. (0–2)**

Ze zbioru liczb naturalnych dwucyfrowych losowo wybieramy jedną liczbę. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia  $A$  polegającego na tym, że otrzymamy liczbę podzielną przez 8 lub liczbę podzielną przez 12.

**Rozwiązanie**

Zbiór zdarzeń elementarnych  $\Omega$  zawiera 90 liczb naturalnych dwucyfrowych. Jest to model klasyczny. Wśród tych liczb jest jednaście liczb podzielnych przez 8, osiem liczb podzielnych przez 12 oraz cztery liczby podzielne zarówno przez 8, jak i przez 12. Zatem

$$|A| = 11 + 8 - 4 = 15. \text{ Stąd } P(A) = \frac{15}{90} = \frac{1}{6}.$$

**Schemat oceniania**

**Zdający otrzymuje..... 1 p.**

gdy zapisze, że  $|A| = 15$

**albo**

zapisze, że  $|\Omega| = 90$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

**Zdający otrzymuje ..... 2 p.**

gdy obliczy i zapisze, że  $P(A) = \frac{15}{90}$ .

**Uwaga**

Jeżeli otrzymany wynik końcowy jest liczbą większa od 1, to zdający otrzymuje **0 punktów** za całe rozwiązanie.

**Zadanie 32. (0–4)**

Dany jest nieskończony rosnący ciąg arytmetyczny  $(a_n)$ , dla  $n \geq 1$ , taki, że  $a_5 = 18$ . Wyrazy  $a_1$ ,  $a_3$  oraz  $a_{13}$  tego ciągu są odpowiednio pierwszym, drugim i trzecim wyrazem pewnego ciągu geometrycznego. Wyznacz wzór na  $n$ -ty wyraz ciągu  $(a_n)$ .

**Rozwiązanie**

Zapisujemy kolejne wyrazy ciągu arytmetycznego  $(a_n)$  w zależności od  $a_5$  oraz  $r$  – różnicy ciągu:  $a_1 = a_5 - 4r$ ,  $a_3 = a_5 - 2r$ ,  $a_{13} = a_5 + 8r$  i po podstawieniu  $a_5 = 18$  otrzymujemy:

$$a_1 = 18 - 4r, \quad a_3 = 18 - 2r, \quad a_{13} = 18 + 8r$$

Wyrazy te są odpowiednio pierwszym, drugim i trzecim wyrazem ciągu geometrycznego  $(b_n)$ . Wykorzystując własności ciągu geometrycznego zapisujemy równanie:

$$(18 - 2r)^2 = (18 - 4r) \cdot (18 + 8r),$$

które następnie przekształcamy równoważnie

$$324 - 72r + 4r^2 = 324 - 72r + 144r - 32r^2,$$

$$36r^2 - 144r = 0.$$

Rozwiązaniami tego równania są:  $r = 4$ ,  $r = 0$ .

Rozwiązanie  $r = 0$  odrzucamy (ciąg  $(a_n)$  jest rosnący) i obliczamy  $a_1$ :  $a_1 = 18 - 4 \cdot 4 = 2$ .

Wyznaczamy  $n$ -ty wyraz ciągu  $(a_n)$ :  $a_n = 2 + (n-1) \cdot 4 = 4n - 2$ .

**Schemat oceniania**

**Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania ..... 1 pkt**

Zdający zapisze kolejne wyrazy ciągu arytmetycznego  $(a_n)$  w zależności od  $a_5$  oraz

$r$  – różnicy ciągu, np.:  $a_1 = a_5 - 4r$ ,  $a_3 = a_5 - 2r$ ,  $a_{13} = a_5 + 8r$

lub

$$a_1 = 18 - 4r, \quad a_3 = 18 - 2r, \quad a_{13} = 18 + 8r$$

i na tym poprzestanie lub dalej popełni błędy.

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania ..... 2 pkt**

Zdający zastosuje własności ciągu geometrycznego i zapisze równanie, wynikające z tych własności: np.  $(18 - 2r)^2 = (18 - 4r) \cdot (18 + 8r)$  lub  $36r^2 - 144r = 0$  i na tym poprzestanie lub dalej popełni błędy.

**Rozwiązanie zadania do końca lecz z usterkami, które jednak nie przekreślają poprawności rozwiązania (np. błędy rachunkowe) ..... 3 pkt**

Zdający

- rozwiąże równanie kwadratowe:  $r = 4$  lub  $r = 0$  i nie odrzuci rozwiązania  $r = 0$ .

albo

- wyznaczy pierwszy wyraz ciągu  $(a_n)$ :  $a_1 = 2$  i na tym poprzestanie

albo

- popełni błąd przy wyznaczaniu  $n$ -tego wyrazu ciągu  $(a_n)$ .

**Rozwiązanie pełne ..... 4 pkt**

Zdający wyznaczy wzór na  $n$ -ty wyraz ciągu  $(a_n)$ :  $a_n = 4n - 2$ .

### Zadanie 33. (0–4)

Dany jest trójkąt równoramienny  $ABC$ , w którym  $|AC| = |BC|$ . Ponadto wiadomo, że  $A = (-2, 4)$  i  $B = (6, -2)$ . Wierzchołek  $C$  należy do osi  $Oy$ . Oblicz współrzędne wierzchołka  $C$ .

#### I sposób rozwiązania

Wyznaczamy współrzędne wierzchołka  $C$ :  $C = (0, y)$ .

Wierzchołek  $C$  należy do symetralnej odcinka  $AB$  (bo trójkąt  $ABC$  jest równoramienny,  $|AC| = |BC|$ ). Stąd mamy równanie  $\sqrt{2^2 + (y-4)^2} = \sqrt{6^2 + (y+2)^2}$ .

Przekształcamy równanie do postaci:  $4 + y^2 - 8y + 16 = 36 + y^2 + 4y + 4$  i obliczamy  $y$ :  $y = -\frac{5}{3}$

.

Szukany punkt  $C$  jest:  $C = \left(0, -\frac{5}{3}\right)$ .

#### Schemat oceniania I sposobu rozwiązania

**Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania ..... 1 pkt**

Zdający ustali, że pierwsza współrzędna punktu  $C$  jest równa 0, zapisze współrzędne punktu  $C$ :  $C = (0, y)$

i na tym poprzestanie lub dalej popełni błędy.

**Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp ..... 2 pkt**

Zdający wyznaczy  $|AC| = \sqrt{2^2 + (y-4)^2}$  oraz  $|AB| = \sqrt{6^2 + (y+2)^2}$

i na tym poprzestanie lub dalej popełni błędy.

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania ..... 3 pkt**

Zdający zapisze równanie z niewiadomą  $y$ :  $\sqrt{2^2 + (y-4)^2} = \sqrt{6^2 + (y+2)^2}$  lub

$4 + y^2 - 8y + 16 = 36 + y^2 + 4y + 4$  i na tym poprzestanie lub dalej popełni błędy.

**Rozwiązanie pełne ..... 4 pkt**

Zdający obliczy współrzędne punktu  $C$ :  $C = \left(0, -\frac{5}{3}\right)$ .

**II sposób rozwiązania**

Obliczamy współrzędne środka odcinka  $AB$ :  $S = (2, 1)$ . Zauważamy, że punkt  $C$  należy do symetralnej odcinka  $AB$ . Obliczamy współczynnik kierunkowy prostej prostopadłej do prostej  $AB$ :  $a = \frac{4}{3}$  i znajdujemy jej równanie:  $4x - 3y - 5 = 0$ . Ponieważ punkt  $C$  należy jednocześnie do osi  $Oy$ , zatem jego pierwsza współrzędna jest równa 0:

$$\begin{cases} 4x - 3y - 5 = 0 \\ x = 0 \end{cases} \text{ . Stąd mamy } y = -\frac{5}{3}.$$

Szukany punktem  $C$  jest:  $C = \left(0, -\frac{5}{3}\right)$ .

**Schemat oceniania II sposobu rozwiązania**

**Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania ..... 1 pkt**

Zdający:

wyznaczy współrzędne środka odcinka  $AB$ :  $S = (2, 1)$

**albo**

wyznaczy współczynnik kierunkowy prostej  $AB$ :  $a = -\frac{3}{4}$

i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy.

**Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp ..... 2 pkt**

Zdający:

wyznaczy współrzędne środka odcinka  $AB$ :  $S = (2, 1)$

**oraz**

wyznaczy współczynnik kierunkowy prostej  $AB$ :  $a = -\frac{3}{4}$

i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy.

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania ..... 3 pkt**

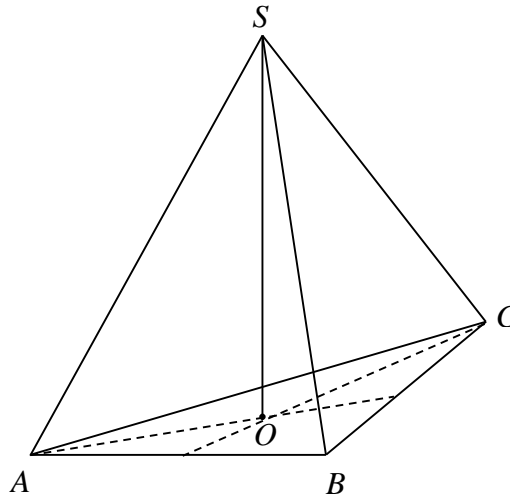
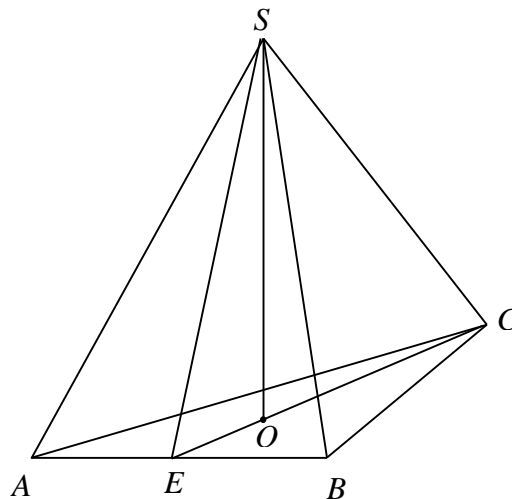
Zdający wyznaczy równanie symetralnej odcinka  $AB$ :  $4x - 3y - 5 = 0$ .

**Rozwiązanie pełne ..... 4 pkt**

Zdający obliczy współrzędne punktu  $C$ :  $C = \left(0, -\frac{5}{3}\right)$ .

**Zadanie 34. (0–5)**

Objętość ostrosłupa prawidłowego trójkątnego  $ABCS$  jest równa  $27\sqrt{3}$ . Długość krawędzi  $AB$  podstawy ostrosłupa jest równa 6 (zobacz rysunek). Oblicz pole powierzchni całkowitej tego ostrosłupa.

**Rozwiązanie**

Obliczamy pole podstawy ostrosłupa:  $P = \frac{6^2\sqrt{3}}{4} = 9\sqrt{3}$ . Oznaczmy wysokość ostrosłupa

$|SO| = H$ , wówczas objętość ostrosłupa jest równa:  $V = \frac{1}{3} \cdot 9\sqrt{3} \cdot H$ .

Z treści zadania objętość ostrosłupa jest równa  $27\sqrt{3}$ , stąd otrzymujemy równanie:

$$27\sqrt{3} = \frac{1}{3} \cdot 9 \cdot \sqrt{3} \cdot H.$$

Zatem  $H = 9$ .

Wysokość ściany bocznej ostrosłupa  $SE$  obliczymy z trójkąta prostokątnego  $SOE$ , w którym

$$|OE| = \frac{1}{3}|CE|, \text{ czyli } |OE| = \frac{1}{3} \cdot \frac{6\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}.$$

Z twierdzenia Pitagorasa dla tego trójkąta otrzymujemy równanie:  $(\sqrt{3})^2 + 9^2 = |SE|^2$ , stąd  $|SE| = \sqrt{84} = 2\sqrt{21}$ .

Obliczamy pole powierzchni całkowitej ostrosłupa:

$$P_c = \frac{36\sqrt{3}}{4} + 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 2\sqrt{21} = 9\sqrt{3} + 18\sqrt{21} = 9(\sqrt{3} + 2\sqrt{21}).$$

### **Schemat oceniania**

**Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania ..... 1 pkt**

Zdający obliczy pole podstawy ostrosłupa:  $P = 9\sqrt{3}$

i na tym poprzestanie lub dalej popełni błędy.

**Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp ..... 2 pkt**

Zdający obliczy wysokość ostrosłupa i długość odcinka  $OE$ :  $H = 9$ ,  $|OE| = \sqrt{3}$

i na tym poprzestanie lub dalej popełni błędy.

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania ..... 3 pkt**

Zdający obliczy wysokość ściany bocznej  $SE$  ostrosłupa:  $|SE| = \sqrt{84} = 2\sqrt{21}$ .

**Rozwiązanie zadania do końca lecz z usterkami, które jednak nie przekreślają poprawności rozwiązania (np. błędy rachunkowe) ..... 4 pkt**

**Rozwiązanie pełne ..... 5 pkt**

Zdający obliczy pole powierzchni całkowitej ostrosłupa:  $P_c = 9\sqrt{3} + 18\sqrt{21} = 9(\sqrt{3} + 2\sqrt{21})$ .