

**EGZAMIN MATURALNY  
W ROKU SZKOLNYM 2015/2016**

**FORMUŁA DO 2014  
(„STARA MATURA”)**

**MATEMATYKA  
POZIOM ROZSZERZONY**

**ZASADY OCENIANIA ROZWIĄZAŃ ZADAŃ  
ARKUSZ MMA-P1**

## Ogólne zasady oceniania

*Uwaga: Akceptowane są wszystkie odpowiedzi merytorycznie poprawne i spełniające warunki zadania.*

### Zadanie 1. (0–3)

II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	1. Liczby rzeczywiste. Zdający stosuje wzór na logarytm potęgi i wzór na zamianę podstawy logarytmu (R1.b).
--	---

### Przykładowe rozwiązanie

Stosujemy wzory na zamianę podstaw logarytmu zapisujemy liczbę  $\log_{\sqrt{2}} 49$  w postaci

$$\log_{\sqrt{2}} 49 = \frac{\log_7 49}{\log_7 \sqrt{2}} \text{ i wykonujemy kolejne przekształcenia: } \log_{\sqrt{2}} 49 = \frac{2}{\log_7 \sqrt{2}}.$$

Zauważamy, że jeżeli  $\log_7 4 = a$  to  $\log_7 4 = \log_7 (\sqrt{2})^4 = 4 \log_7 \sqrt{2} = a$ .

$$\text{Zatem } \log_7 \sqrt{2} = \frac{a}{4}.$$

$$\text{Stąd wynika, że } \log_{\sqrt{2}} 49 = \frac{2}{\frac{a}{4}} = \frac{8}{a}.$$

### Schemat punktowania

**Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp ..... 1 p.**

Zdający:

- zastosuje twierdzenie o zamianie podstawy logarytmu, na przykład zapisze szukaną liczbę w postaci:  $\log_{\sqrt{2}} 49 = \frac{2}{\log_7 \sqrt{2}}$  lub  $\log_{\sqrt{2}} 49 = \frac{4}{\log_7 2}$

albo

- wyznaczy liczbę  $\log_7 \sqrt{2}$  w zależności od  $a$ :  $\log_7 \sqrt{2} = \frac{a}{4}$  lub liczbę  $\log_7 2$

$$\text{w zależności od } a: \log_7 2 = \frac{a}{2}$$

i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania ..... 2 p.**

Zdający zastosuje twierdzenie o zamianie podstawy logarytmu, na przykład zapisze szukaną liczbę w postaci:  $\log_{\sqrt{2}} 49 = \frac{2}{\log_7 \sqrt{2}}$  lub  $\log_{\sqrt{2}} 49 = \frac{4}{\log_7 2}$  oraz wyznaczy liczbę  $\log_7 \sqrt{2}$

w zależności od  $a$ :  $\log_7 \sqrt{2} = \frac{a}{4}$  lub liczbę  $\log_7 2$  w zależności od  $a$ :  $\log_7 2 = \frac{a}{2}$ .

Rozwiązanie pełne ..... 3 p.

Zdający wyznaczy liczbę  $\log_{\sqrt{2}} 49 : \frac{8}{a}$ .

**Zadanie 2. (0–5)**

IV. Użycie i tworzenie strategii.	2. Wyrażenia algebraiczne. Zdający wykonuje dzielenie wielomianu przez dwumian $x - a$ , stosuje twierdzenie o reszcie z dzielenia wielomianu przez dwumian $x - a$ (R2.b). 3. Równania i nierówności. Zdający rozwiązuje równania i nierówności wielomianowe (R3.c).
-----------------------------------	--

**Przykładowe rozwiązania**

I sposób

Wielomian  $W(x) = 2x^3 + mx^2 - 22x + n$  jest podzielny przez dwumiany  $x + 3$  i  $x - 4$ , zatem

$$\begin{cases} W(-3) = 0 \\ W(4) = 0 \end{cases}$$

Rozwiązujemy układ równań:

$$\begin{cases} 2 \cdot (-3)^3 + m \cdot (-3)^2 - 22 \cdot (-3) + n = 0 \\ 2 \cdot 4^3 + m \cdot 4^2 - 22 \cdot 4 + n = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2 \cdot (-27) + 9m + 66 + n = 0 \\ 2 \cdot 64 + 16m - 88 + n = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 9m + n = -12 \\ 16m + n = -40 \end{cases}$$

$$\begin{cases} m = -4 \\ n = 24 \end{cases}$$

$$\begin{cases} m = -4 \\ n = 24 \end{cases}$$

$$\begin{cases} m = -4 \\ n = 24 \end{cases}$$

$$\begin{cases} m = -4 \\ n = 24 \end{cases}$$

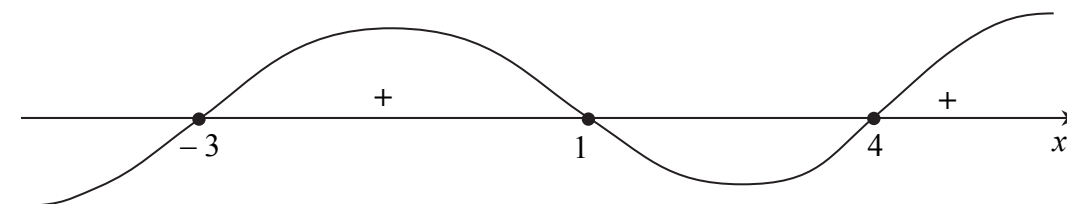
$$\begin{cases} m = -4 \\ n = 24 \end{cases}$$

Zatem wielomian  $W$  ma postać  $W(x) = 2x^3 - 4x^2 - 22x + 24$ .

Rozwiązujemy nierówność  $2x^3 - 4x^2 - 22x + 24 \geq 0$ .

Po podzieleniu wielomianu  $W$  przez dwumian  $x + 3$  otrzymujemy iloraz  $2x^2 - 10x + 8$ , który dzielimy przez dwumian  $x - 4$  i otrzymujemy iloraz  $2x - 2$ . W rezultacie wielomian  $W$  możemy zapisać w postaci  $W(x) = 2(x + 3)(x - 1)(x - 4)$ . Pierwiastkami wielomianu  $W$  są liczby:  $-3, 1, 4$ .

Szkicujemy wykres wielomianu  $W$ , z którego odczytujemy rozwiązanie nierówności.



Zatem rozwiązaniem nierówności  $x^3 - 2x^2 - 11x + 12 \geq 0$  jest każda liczba rzeczywista  $x \in \langle -3, 1 \rangle \cup \langle 4, +\infty \rangle$ .

## II sposób

Wielomian  $W(x) = 2x^3 + mx^2 - 22x + n$  jest podzielny przez dwumiany  $x + 3$  i  $x - 4$ , więc jest podzielny przez wielomian  $x^2 - x - 12$ .

Wykonujemy dzielenie  $(2x^3 + mx^2 - 22x + n) : (x^2 - x - 12)$ , otrzymujemy iloraz  $2x + m + 2$  oraz resztę  $(4 + m)x + 12m + n + 24$ .

Wobec wspomnianej wyżej podzielności mamy  $(4 + m)x + 12m + n + 24 = 0$  dla każdego  $x \in R$ . Oznacza to, że spełniony musi być układ równań:

$$\begin{cases} 4 + m = 0 \\ 12m + n + 24 = 0, \end{cases}$$

skąd otrzymamy

$$\begin{cases} m = -4 \\ n = 24. \end{cases}$$

Dalsze rozumowanie jak w sposobie I rozwiązania.

## **Schemat punktowania**

**Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania..... 1 p.**

Zdający zapisze układ równań, wynikający z podzielności wielomianu  $W(x) = 2x^3 + mx^2 - 22x + n$  przez

- dwumiany  $x + 3$  i  $x - 4$ :  $\begin{cases} W(-3) = 0 \\ W(4) = 0. \end{cases}$

albo

- $x^2 - x - 12$ :  $\begin{cases} 4 + m = 0 \\ 12m + n + 24 = 0. \end{cases}$

**Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp ..... 2 p.**

Zdający obliczy współczynniki  $m$  i  $n$ :  $m = -4$ ,  $n = 24$ .

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania..... 3 p.**

Zdający wyznaczy trzeci pierwiastek wielomianu  $W(x) = 2x^3 - 4x^2 - 22x + 24$ :  $x = 1$  i zapisze wielomian w postaci iloczynowej:  $W(x) = 2(x + 3)(x - 1)(x - 4)$ .

**Rozwiązanie zadania do końca, lecz z usterkami, które jednak nie przekreślają poprawności rozwiązania (np. błędy rachunkowe) .....4 p.**

Zdający naszkicuje wykres wielomianu  $W(x) = 2x^3 - 4x^2 - 22x + 24$ .

**Rozwiązanie pełne .....5 p.**

Zdający wyznaczy zbiór rozwiązań nierówności  $2x^3 - 4x^2 - 22x + 24 \geq 0$ :

$$\langle -3, 1 \rangle \cup \langle 4, +\infty \rangle.$$

**Zadanie 3. (0-4)**

IV. Użycie i tworzenie strategii.	6. Trygonometria. Zdający rozwiązuje równania i nierówności trygonometryczne (R6.e).
-----------------------------------	--

**Przykładowe rozwiązanie**

Korzystając z „jedynki trygonometrycznej”, sprowadzamy równanie

$$-2 \cos^2 x + 3 \sin x + 3 = 0.$$

do równania z jedną funkcją trygonometryczną:

$$-2(1 - \sin^2 x) + 3 \sin x + 3 = 0,$$

$$2 \sin^2 x + 3 \sin x + 1 = 0.$$

Wprowadzamy niewiadomą pomocniczą, np.  $\sin x = t$ ,  $t \in \langle -1, 1 \rangle$ .

Otrzymujemy równanie kwadratowe z niewiadomą  $t$ :

$$2t^2 + 3t + 1 = 0.$$

Rozwiązaniem równania są liczby  $t_1 = -1$ ,  $t_2 = -\frac{1}{2}$ .

Powracając do podstawienia, otrzymujemy:  $\sin x = -1$  lub  $\sin x = -\frac{1}{2}$ , a stąd dane równanie w przedziale  $\langle 0, 2\pi \rangle$  ma rozwiązania:

$$x = \frac{3}{2}\pi \text{ lub } x = \frac{7}{6}\pi \text{ lub } x = \frac{11}{6}\pi.$$

**Schemat punktowania**

**Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania ..... 1 p.**

Zdający przekształci równanie  $-2 \cos^2 x + 3 \sin x + 3 = 0$  do równania z jedną funkcją trygonometryczną np.  $2 \sin^2 x + 3 \sin x + 1 = 0$ .

**Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp..... 2 p.**

Zdający rozwiąże równanie kwadratowe  $2 \sin^2 x + 3 \sin x + 1 = 0$ :  $\sin x = -1$  lub  $\sin x = -\frac{1}{2}$ .

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania..... 3 p.**

Zdający rozwiąże równanie  $\sin x = -1$ :  $x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$  lub równanie  $\sin x = -\frac{1}{2}$ :

$$x = \frac{7}{6}\pi + 2k\pi \text{ lub } x = \frac{11}{6}\pi + 2k\pi, \text{ gdzie } k \text{ jest liczbą całkowitą.}$$

**Rozwiązanie pełne ..... 4 p.**

Zdający rozwiąże oba równania:  $\sin x = -1$  oraz  $\sin x = -\frac{1}{2}$  uwzględniając podany przedział:

$$x = \frac{3}{2}\pi \text{ lub } x = \frac{7}{6}\pi \text{ lub } x = \frac{11}{6}\pi.$$

*Uwagi:*

1. Jeżeli zdający rozwiąże równanie kwadratowe z błędem, ale otrzyma dwa różne pierwiastki należące do przedziału  $\langle -1, 1 \rangle$  i rozwiąże zadanie konsekwentnie do końca, to za całe rozwiązanie otrzymuje **3 punkty**.
2. Jeżeli zdający rozwiąże równanie kwadratowe z błędem, ale otrzyma dwa różne pierwiastki i tylko jeden z nich należy do przedziału  $\langle -1, 1 \rangle$  i rozwiąże zadanie konsekwentnie do końca, to za całe rozwiązanie otrzymuje **2 punkty**.

**Zadanie 4. (0–6)**

III. Modelowanie matematyczne.	5. Ciągi liczbowe. Zdający bada, czy dany ciąg jest arytmetyczny lub geometryczny, stosuje wzory na $n$ -ty wyraz i sumę $n$ początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego i ciągu geometrycznego, również umieszczone w kontekście praktycznym. (5.b,c).
--------------------------------	---

**Przykładowe rozwiązanie**

Oznaczmy przez  $r$  różnicę ciągu arytmetycznego. Jeżeli drugi wyraz tego ciągu jest równy 4, to  $a = 4 - r$ ,  $b = 4 + r$  i  $c = 4 + 2r$ .

Przy tych oznaczeniach, ciąg geometryczny  $(a, a + b, 4c)$  możemy zapisać następująco  $(4 - r, 8, 16 + 8r)$ . Stąd otrzymujemy równanie

$$64 = (4 - r)(16 + 8r).$$

Po uporządkowaniu otrzymujemy równanie  $8r(r - 2) = 0$ . Rozwiązaniami tego równania są liczby  $r = 0$  oraz  $r = 2$ .

Dla  $r = 0$  otrzymujemy  $a = b = c = 4$ .

Dla  $r = 2$  otrzymujemy  $a = 2$ ,  $b = 6$ ,  $c = 8$ .

*Uwaga:*

W rozwiązaniu można zapisać pierwszy i czwarty wyraz ciągu w zależności od trzeciego wyrazu ciągu arytmetycznego.

Jeżeli  $a = 8 - b$  oraz  $c = 2b - 4$ , to ciąg geometryczny ma postać  $(8 - b, 8, 2b - 4)$ .

Wykorzystując własność ciągu geometrycznego, możemy zapisać równanie

$$64 = (8 - b)(8b - 16).$$

Rozwiązaniami tego równania są liczby  $b = 4$  oraz  $b = 6$ .

Gdy  $b = 4$ , to  $a = 4$  i  $c = 4$ .

Gdy  $b = 6$ , to  $a = 2$  i  $c = 8$ .

Możemy też zapisać trzeci i czwarty wyraz ciągu w zależności od pierwszego wyrazu ciągu arytmetycznego.

Jeżeli  $b = 8 - a$  oraz  $c = 12 - 2a$ , to ciąg geometryczny ma postać  $(a, 8, 48 - 8a)$ .

Wykorzystując własność ciągu geometrycznego, możemy zapisać równanie

$$64 = a(48 - 8a).$$

Rozwiązaniami tego równania są liczby  $a = 2$  oraz  $a = 4$ .

Gdy  $a = 2$ , to  $b = 6$  i  $c = 8$ .

Gdy  $a = 4$ , to  $b = 4$  i  $c = 4$ .

### Schemat punktowania

**Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania ..... 1 p.**

Zdający wykorzysta własności ciągu arytmetycznego i wprowadzi oznaczenia, np.:

$$a = 4 - r, b = 4 + r \text{ i } c = 4 + 2r$$

lub

$$a = 8 - b \text{ oraz } c = 2b - 4,$$

lub

$$b = 8 - a \text{ oraz } c = 12 - 2a.$$

**Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp..... 2 p.**

Zdający zapisze wyrazy ciągu geometrycznego z użyciem jednej niewiadomej, np.:  $(4 - r, 8, 16 + 8r)$  lub  $(8 - b, 8, 2b - 4)$ , lub  $(a, 8, 48 - 8a)$ .

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania ..... 3 p.**

Zdający wykorzysta własności ciągu geometrycznego i zapisze równanie z jedną niewiadomą, np.:  $64 = (4 - r)(16 + 8r)$  lub  $64 = (8 - b)(8b - 16)$ , lub  $64 = a(48 - 8a)$ .

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania i dodatkowy postęp na drodze do pełnego rozwiązania ..... 4 p.**

Zdający obliczy różnicę ciągu arytmetycznego w przynajmniej jednym przypadku lub wyznaczy jedną z liczb spośród  $a, b, c$  i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

**Rozwiązanie do końca z błędami rachunkowymi, które nie przekreślają poprawności rozwiązania ..... 5 p.**

Zdający obliczy  $a, b$  i  $c$

- tylko w jednym przypadku

$$a = 4 - r, b = 4 + r \text{ i } c = 4 + 2r$$

albo

- w dwóch przypadkach z błędami rachunkowymi.

**Rozwiązanie pełne ..... 6 p.**

Zdający obliczy  $a, b, c$  w obu przypadkach:

$$a = b = c = 4 \text{ lub } a = 2, b = 6, c = 8.$$

Uwagi:

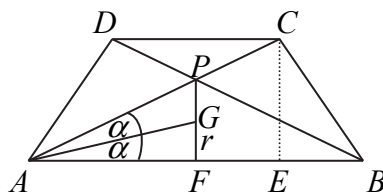
1. Jeżeli zdający tylko poda odpowiedź:  $a = b = c = 4$ , to za całe rozwiązanie otrzymuje **1 punkt**.
2. Jeżeli zdający poda:  $a = b = c = 4$  lub  $a = 2, b = 6, c = 8$  i sprawdzi, że odpowiednie ciągi spełniają warunki zadania, to za całe rozwiązanie otrzymuje **2 punkty**.
3. Jeżeli zdający poda jako całe rozwiązanie: ciąg arytmetyczny: 2, 4, 6, 8, to otrzymuje **1 punkt**.
4. Jeżeli zdający poda jako całe rozwiązanie: ciąg arytmetyczny: 2, 4, 6, 8, a ciąg geometryczny: 2, 8, 32, to otrzymuje **2 punkty**.
5. Jeżeli zdający poda jako całe rozwiązanie: ciąg arytmetyczny: 2, 4, 6, 8, albo 4, 4, 4, 4, to otrzymuje **2 punkty**.

### Zadanie 5. (0–6)

IV. Użycie i tworzenie strategii.	7. Planimetria. Zdający stosuje twierdzenia charakteryzujące czworokąty wpisane w okrąg i czworokąty opisane na okręgu oraz znajduje związki miarowe w figurach płaskich, także z zastosowaniem trygonometrii (R7.a, 7.c).
-----------------------------------	--

### Przykładowe rozwiązania

I sposób



Wprowadzamy oznaczenia:  $|\sphericalangle FAP| = 2\alpha, |FG| = r$ .

W trapezie równoramiennym  $ABCD$  mamy:

$$|AE| = \frac{|AB| + |CD|}{2} = \frac{84 + 36}{2} = 60 \text{ oraz } |BE| = \frac{|AB| - |CD|}{2} = \frac{84 - 36}{2} = 24.$$

Stosując twierdzenie Pitagorasa w trójkącie  $BEC$ , obliczamy wysokość  $CE$  trapezu

$$|CE| = \sqrt{|BC|^2 - |BE|^2} = \sqrt{1600 - 576} = 32.$$

W trójkącie  $AEC$  mamy  $\text{tg} 2\alpha = \frac{32}{60} = \frac{8}{15}$ .

Korzystając ze wzoru na tangens podwojonego kąta, obliczamy kolejno:

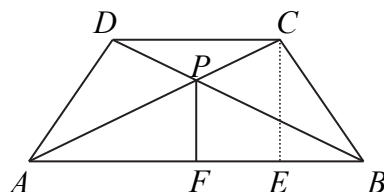
$$\begin{aligned} \frac{2\text{tg} \alpha}{1 - \text{tg}^2 \alpha} &= \frac{8}{15}, \\ 15\text{tg} \alpha &= 4 - 4\text{tg}^2 \alpha, \\ 4\text{tg}^2 \alpha + 15\text{tg} \alpha - 4 &= 0, \\ \Delta &= 289, \\ \text{tg} \alpha &= \frac{-15 + 17}{8} = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$



Ujemne rozwiązanie odrzucamy, bo  $\alpha$  jest kątem ostrym.  
Obliczamy promień  $r$  okręgu wpisanego w trójkąt  $ABP$ :

$$r = |AF| \cdot \operatorname{tg} \alpha = 42 \cdot \frac{1}{4} = 10,5.$$

## II sposób



W trapezie równoramiennym  $ABCD$  mamy:

$$|AE| = \frac{|AB| + |CD|}{2} = \frac{84 + 36}{2} = 60 \text{ oraz } |BE| = \frac{|AB| - |CD|}{2} = \frac{84 - 36}{2} = 24.$$

Ponadto  $|AF| = |FB| = 42$ .

Stosując twierdzenie Pitagorasa w trójkącie  $BEC$  obliczamy wysokość  $CE$  trapezu

$$|CE| = \sqrt{|BC|^2 - |BE|^2} = \sqrt{1600 - 576} = 32.$$

Korzystając z podobieństwa trójkątów  $AFP$  i  $AEC$ , obliczamy wysokość  $PF$  trójkąta  $ABP$ .  
Mamy

$$\frac{|PF|}{|AF|} = \frac{|CE|}{|AE|},$$

$$\text{stąd } |PF| = \frac{42 \cdot 32}{60} = 22,4.$$

Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta  $AFP$  obliczamy długość odcinka  $AP$ :

$$|AP| = \sqrt{42^2 + (22,4)^2} = 47,6.$$

Następnie obliczamy pole trójkąta  $ABP$  i połowę jego obwodu:

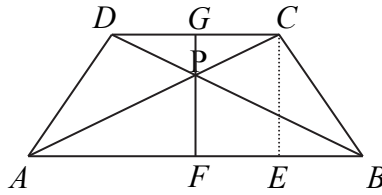
$$P_{ABP} = \frac{1}{2} \cdot 84 \cdot 22,4 = 940,8$$

$$p = \frac{47,6 + 47,6 + 84}{2} = 89,6.$$

Korzystając ze wzoru na pole trójkąta w zależności od promienia okręgu wpisanego w trójkąt obliczamy promień okręgu wpisanego w trójkąt  $ABP$ :

$$r = \frac{P_{ABP}}{p} = \frac{940,8}{89,6} = 10,5.$$

III sposób



Trójkąty  $ABP$  i  $CDP$  są podobne w skali  $k = \frac{|AB|}{|CD|} = \frac{7}{3}$ , stąd  $\frac{|PF|}{|PG|} = \frac{7x}{3x}$

W trapezie równoramiennym  $ABCD$  mamy:

$$|AE| = \frac{|AB| + |CD|}{2} = \frac{84 + 36}{2} = 60 \text{ oraz } |BE| = \frac{|AB| - |CD|}{2} = \frac{84 - 36}{2} = 24.$$

Stosujemy twierdzenie Pitagorasa w trójkącie  $BEC$  i obliczamy wysokość  $CE$  trapezu:

$$|CE| = \sqrt{|BC|^2 - |BE|^2} = \sqrt{1600 - 576} = 32.$$

Ponieważ  $|PF| + |PG| = |CE|$ , więc  $7x + 3x = 32$ , stąd  $x = 3,2$ .

Zatem  $|PF| = 7x = 22,4$ .

Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta  $AFP$  obliczamy długość odcinka  $AP$ :

$$|AP| = \sqrt{42^2 + (22,4)^2} = 47,6.$$

W trójkąt  $ABP$  wpisujemy okrąg o środku w punkcie  $O$  i promieniu  $KO$ , gdzie  $K$  jest punktem styczności okręgu z bokiem  $AP$  trójkąta. Zauważamy, że trójkąt  $PKO$  jest podobny do trójkąta  $AFP$  (cecha  $kkk$ ).

Niech  $|KO| = |OF| = r$ , stąd  $\frac{|KO|}{|PF| - |OF|} = \frac{|AF|}{|AP|}$ .

Zatem  $\frac{r}{22,4 - r} = \frac{42}{47,6}$  i stąd  $r = 10,5$ .

**Schemat punktowania**

**Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania ..... 1 p.**

Zdający obliczy wysokość trapezu  $|CE| = 32$ .

**Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp ..... 2 p.**

Zdający obliczy

- tangens kąta pomiędzy przekątną  $AC$  i podstawą  $AB$  trapezu:  $\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{8}{15}$

albo

- długość odcinka  $AP$  lub  $PF$ :  $|AP| = 47,6$ ,  $|PF| = 22,4$

i na tym zakończy lub dalej popelni błędy.

**Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp i w którym przedstawiono początek rozumowania prowadzącego do pokonania zasadniczych trudności zadania ..... 3 p.**

Zdający

- obliczy pole trójkąta  $ABP$ , ale nie obliczy jego obwodu

albo

- nie obliczy pola trójkąta  $ABP$ , ale obliczy jego obwód,

albo

- uzasadni podobieństwo trójkątów  $PKO$  i  $AFP$ , ale nie zapisze poprawnie równania, z którego można wyznaczyć  $r$ .

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania ..... 4 p.**

Zdający

- zapisze równanie, z którego można obliczyć tangens połowy kąta pomiędzy przekątną  $AC$  i podstawą  $AB$  trapezu:  $\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha} = \frac{8}{15}$

albo

- obliczy pole trójkąta  $ABP$  i jego obwód:  $P_{ABP} = 940,8$ ,  $O = 179,2$ ,

albo

- zauważy podobieństwo trójkątów  $PKO$  i  $AFP$  i zapisze równanie, z którego można wyznaczyć  $r$ , np.  $\frac{r}{22,4-r} = \frac{42}{47,6}$ .

**Rozwiązanie zadania do końca, lecz z usterkami, które jednak nie przekreślają poprawności rozwiązania (np. błędy rachunkowe) ..... 5 p.**

Zdający obliczy

- tangens połowy kąta pomiędzy przekątną  $AC$  i podstawą  $AB$  trapezu:  $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{4}$

albo

- promień okręgu z błędem rachunkowym.

**Rozwiązanie pełne ..... 6 p.**

Zdający obliczy promień okręgu  $r = 10,5$ .

### Zadanie 6. (0–6)

IV. Użycie i tworzenie strategii.	8. Geometria na płaszczyźnie kartezjańskiej. Zdający podaje równanie prostej, mając dane dwa jej punkty lub jeden punkt i współczynnik $a$ w równaniu kierunkowym, bada równoległość i prostopadłość prostych na podstawie ich równań kierunkowych, interpretuje geometrycznie układ dwóch równań liniowych z dwiema niewiadomymi (8.b, c, d).
-----------------------------------	--

### Przykładowe rozwiązania

#### I sposób

Wyznaczamy równanie prostej  $AB$ , korzystając ze wzoru na równanie prostej przechodzącej przez dwa punkty:  $(y-1)(6-1) - (2-1)(x-1) = 0$ .

$$\begin{aligned}5(y-1) - (x-1) &= 0, \\5(y-1) &= x-1.\end{aligned}$$

Zatem prosta  $AB$  ma równanie  $y = \frac{1}{5}x + \frac{4}{5}$ .

Wyznaczamy równanie prostej prostopadłej do prostej  $AB$ , przechodzącej przez punkt  $M$ :

$$y = -5x + 18.$$

Wyznaczamy równanie prostej przechodzącej przez punkty  $A = (1, 1)$  i  $M = (3, 3)$ :

$$\begin{aligned}(y-1)(3-1) - (3-1)(x-1) &= 0, \\2(y-1) - 2(x-1) &= 0.\end{aligned}$$

Zatem prosta  $AM$  ma równanie  $y = x$ .

Współczynnik kierunkowy prostej  $BC$  jest równy  $a_2 = -1$  i do prostej należy punkt  $B$ , więc równanie prostej ma postać  $y = -x + 8$ .

Punkt  $C = (x, y)$  jest punktem wspólnym prostych  $CM$  i  $BC$ , więc jego współrzędne wyznaczamy, rozwiązując układ równań  $\begin{cases} y = -5x + 18 \\ y = -x + 8 \end{cases}$ .

Zatem punkt  $C$  ma współrzędne  $\left(\frac{5}{2}, \frac{11}{2}\right)$ .

Wyznaczamy pole trójkąta  $ABC$ . Można to zrobić różnymi metodami.

#### I metoda wyznaczania pola trójkąta $ABC$

Obliczamy długość odcinka  $AB$ :  $|AB| = \sqrt{(6-1)^2 + (2-1)^2} = \sqrt{26}$ .

Wyznaczamy odległość  $h$  punktu  $C$  od prostej  $AB$ .

$$h = \frac{\left| \frac{5}{2} - 5 \cdot \frac{11}{2} + 4 \right|}{\sqrt{1^2 + 5^2}} = \frac{|-21|}{\sqrt{26}}$$

Wyznaczamy pole trójkąta  $ABC$ :  $P = \frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot h = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{26} \cdot \frac{21}{\sqrt{26}} = \frac{21}{2} = 10,5$ .

Odp.: Pole trójkąta  $ABC$  jest równe  $P = 10,5$ .

II metoda wyznaczania pola trójkąta  $ABC$ 

Wyznaczamy pole trójkąta  $ABC$ , korzystając ze wzoru na pole trójkąta o wierzchołkach w punktach  $A = (1, 1)$  i  $B = (6, 2)$  i  $C = \left(\frac{5}{2}, \frac{11}{2}\right)$ .

$$P = \frac{1}{2} |(x_B - x_A)(y_C - y_A) - (y_B - y_A)(x_C - x_A)| = \frac{1}{2} \left| (6-1) \left( \frac{11}{2} - 1 \right) - (2-1) \left( \frac{5}{2} - 1 \right) \right|,$$

$$P = \frac{1}{2} |22,5 - 1,5| = 10,5.$$

Odp.: Pole trójkąta  $ABC$  jest równe  $P = 10,5$ .

III metoda wyznaczania pola trójkąta  $ABC$ 

Wyznaczamy współrzędne wektorów  $\vec{AB}$  i  $\vec{AC}$ :  $\vec{AB} = [5, 1]$  i  $\vec{AC} = \left[\frac{3}{2}, \frac{9}{2}\right]$ .

Wyznaczamy pole trójkąta  $ABC$ , korzystając ze wzoru

$$P = \frac{1}{2} |d(\vec{AB}, \vec{AC})| = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 1,5 & 4,5 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} (22,5 - 1,5) = 10,5$$

Odp.: Pole trójkąta  $ABC$  jest równe  $P = 10,5$ .

II sposób

Wyznaczamy równanie prostej przechodzącej przez punkty  $A = (1, 1)$  i  $M = (3, 3)$ :

$$(y-1)(3-1) - (3-1)(x-1) = 0,$$

$$2(y-1) - 2(x-1) = 0.$$

Zatem prosta  $AM$  ma równanie  $y = x$ .

Wyznaczamy równanie prostej przechodzącej przez punkty  $B = (6, 2)$  i  $M = (3, 3)$ :

$$(y-2)(3-6) - (3-2)(x-6) = 0,$$

$$-3(y-2) - (x-6) = 0.$$

Zatem prosta  $BM$  ma równanie  $y = -\frac{1}{3}x + 4$ .

Wyznaczamy równania prostych, zawierających boki  $AC$  i  $BC$  trójkąta, które są prostopadłe odpowiednio do prostych:  $BM$  i  $AM$ .

Współczynnik kierunkowy prostej  $AC$  jest równy  $a_1 = 3$  i do prostej należy punkt  $A$ , więc równanie prostej ma postać  $y = 3x - 2$ .

Współczynnik kierunkowy prostej  $BC$  jest równy  $a_2 = -1$  i do prostej należy punkt  $B$ , więc równanie prostej ma postać  $y = -x + 8$ .

Punkt  $C = (x, y)$  jest punktem wspólnym prostych  $AC$  i  $BC$ , więc jego współrzędne

wyznaczamy, rozwiązując układ równań

$$\begin{cases} y = 3x - 2 \\ y = -x + 8 \end{cases}$$

$$3x - 2 = -x + 8,$$

$$x = 2,5,$$

$$y = 5,5.$$

Zatem punkt  $C$  ma współrzędne  $\left(\frac{5}{2}, \frac{11}{2}\right)$ .

Wyznaczamy pole trójkąta  $ABC$  jak w I sposobie rozwiązania.

**Schemat punktowania**

**Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania..... 1 p.**

Zdający

- wyznaczy równanie prostej  $AB : y = \frac{1}{5}x + \frac{4}{5}$

albo

- wyznaczy równanie prostej  $AM : y = x$ ,

albo

- wyznaczy równanie prostej  $BM : y = -\frac{1}{3}x + 4$ ,

albo

- obliczy długość odcinka  $AB : |AB| = \sqrt{26}$ .

**Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp..... 2 p.**

Zdający

- wyznaczy równania prostych  $AB : y = \frac{1}{5}x + \frac{4}{5}$  i  $AM : y = x$

albo

- wyznaczy równania prostych  $AM : y = x$  i  $BM : y = -\frac{1}{3}x + 4$ .

**Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp i w którym przedstawiono początek rozumowania prowadzącego do pokonania zasadniczych trudności zadania ..... 3 p.**

Zdający wyznaczy równania prostych zawierających boki  $AC$  i  $BC$  i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania..... 4 p.**

Zdający wyznaczy współrzędne punktu  $C = \left(\frac{5}{2}, \frac{11}{2}\right)$ .

**Rozwiązanie zadania do końca, lecz z usterkami, które jednak nie przekreślają poprawności rozwiązania (np. błędy rachunkowe) ..... 5 p.**

Zdający

- wyznaczy odległość  $h$  punktu  $C$  od prostej  $AB : h = \frac{21}{\sqrt{26}}$  i na tym zakończy

albo

- popełni błąd rachunkowy i konsekwentnie do popełnionego błędu rozwiąże zadanie do końca.

**Rozwiązanie pełne ..... 6 p.**

Zdający wyznaczy pole trójkąta  $ABC : P = 10,5$ .

Uwagi:

1. Jeśli zdający wyznaczy równania prostych zawierających boki  $AC$  i  $BC$  i na tym poprzestanie, to otrzymuje **3 punkty**.
2. Jeżeli zdający obliczy długość  $|AB|$  i wyznaczy równanie prostej  $AB$ , to otrzymuje **2 punkty**.

### Zadanie 7. (0–3)

V. Rozumowanie i argumentacja.	2. Wyrażenia algebraiczne. Zdający używa wzorów skróconego mnożenia na $(a \pm b)^2$ oraz $a^2 - b^2$ (2.1).
--------------------------------	--

### Przykładowe rozwiązania

#### I sposób

Ponieważ liczba  $a$  przy dzieleniu przez 6 daje resztę 1, więc  $a = 6k + 1$ , gdzie  $k$  jest liczbą całkowitą nieujemną.

Ponieważ liczba  $b$  przy dzieleniu przez 6 daje resztę 5, więc  $b = 6l + 5$ , gdzie  $l$  jest liczbą całkowitą nieujemną.

$$\text{Wtedy } a^2 - b^2 = (6k + 1)^2 - (6l + 5)^2 = (6k + 6l + 6)(6k - 6l - 4) = 12(k + l + 1)(3k - 3l - 2).$$

Wykazaliśmy, że liczba  $a^2 - b^2$  jest podzielna przez 12. Należy jeszcze wykazać, że przynajmniej jedna z liczb  $k + l + 1$  lub  $3k - 3l - 2$  jest podzielna przez 2.

Jeśli liczby całkowite  $k$  i  $l$  są jednakowej parzystości, to liczba  $k - l$  jest parzysta oraz liczba  $3k - 3l - 2 = 3(k - l) - 2$  jest parzysta, jako różnica dwóch liczb parzystych.

Jeśli liczby całkowite  $k$  i  $l$  są różnej parzystości, to liczba  $k + l + 1$  jest parzysta, jako suma dwóch liczb nieparzystych i jednej parzystej. To kończy dowód.

#### II sposób

Ponieważ liczba  $a$  przy dzieleniu przez 6 daje resztę 1, więc  $a = 6k + 1$ , gdzie  $k$  jest liczbą całkowitą nieujemną.

Ponieważ liczba  $b$  przy dzieleniu przez 6 daje resztę 5, więc  $b = 6l - 1$ , gdzie  $l$  jest liczbą całkowitą nieujemną.

$$\text{Wtedy } a^2 - b^2 = (6k + 1)^2 - (6l - 1)^2 = (6k + 6l)(6k - 6l + 2) = 12(k + l)(3k - 3l + 1).$$

Wykazaliśmy, że liczba  $a^2 - b^2$  jest podzielna przez 12. Należy jeszcze wykazać, że przynajmniej jedna z liczb  $k + l$  lub  $3k - 3l + 1$  jest podzielna przez 2.

Jeśli liczby całkowite  $k$  i  $l$  są jednakowej parzystości, to liczba  $k + l$  jest parzysta.

Jeśli liczby całkowite  $k$  i  $l$  są różnej parzystości, to liczba  $k - l$  jest nieparzysta, więc liczba  $3k - 3l + 1 = 3(k - l) + 1$  jest parzysta. To kończy dowód.

### Schemat punktowania

**Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp ..... 1 p.**

Zdający zapisze liczbę  $a^2 - b^2$  w postaci  $12(k + l + 1)(3k - 3l - 2)$  lub w postaci  $12(k + l)(3k - 3l + 1)$  i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania ..... 2 p.**

Zdający

- uzasadni parzystość jednej z liczb  $k+l+1$  lub  $3k-3l-2$  w jednym z przypadków w zależności od parzystości liczb  $k$  i  $l$

albo

- uzasadni parzystość jednej z liczb  $k+l$  lub  $3k-3l+1$  w jednym z przypadków w zależności od parzystości liczb  $k$  i  $l$ .

**Rozwiązanie pełne ..... 3 p.**

Zdający uzasadni podzielność liczby  $a^2 - b^2$  przez 24.

*Uwaga:*

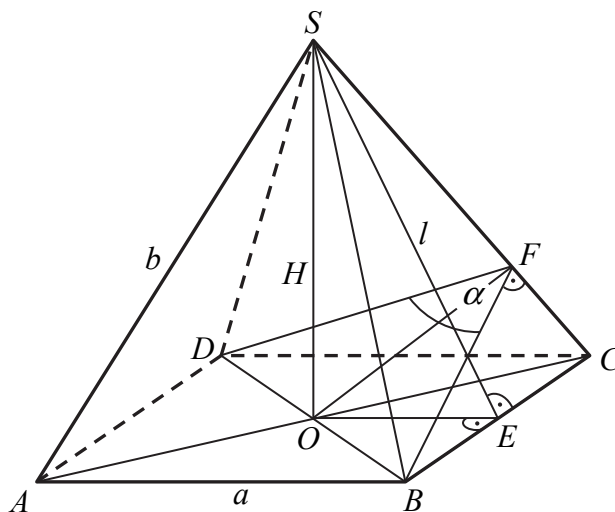
Jeżeli zdający rozważa tylko szczególne przypadki, np. przyjmie  $a = 6k + 1$  oraz  $b = 6k + 5$  i wyznaczy  $a^2 - b^2 = (6k + 1)^2 - (6k + 5)^2 = 24(-2k - 1)$ , to za całe rozwiązanie otrzymuje **0 punktów**.

**Zadanie 8. (0–6)**

IV. Użycie i tworzenie strategii.	9. Stereometria. Zdający wyznacza związki miarowe w wielościanach i bryłach obrotowych z zastosowaniem trygonometrii (9.b).
-----------------------------------	---

**Przykładowe rozwiązanie**

Strategię rozwiązania zadania można zrealizować na wiele sposobów. Każdy z nich różni się zestawem i kolejnością zastosowanych związków między odcinkami w ostrosłupie. Przyjmijmy następujące oznaczenia jak na rysunku.



Wtedy  $|OB| = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ ,  $|OE| = \frac{a}{2}$ ,  $\sphericalangle BFO = 60^\circ$ .

Ponieważ trójkąt  $BFO$  jest prostokątny, stąd  $\frac{|BO|}{|BF|} = \sin 60^\circ$ .



Zatem

$$|BF| = \frac{|BO|}{\sin 60^\circ} = \frac{\frac{a\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{6}}{3}.$$

Trójkąty  $SEC$  i  $BFC$  są podobne, stąd  $\frac{|SE|}{|SC|} = \frac{|BF|}{|BC|}$ , czyli  $\frac{l}{b} = \frac{\frac{a\sqrt{6}}{3}}{a}$ . Zatem  $l = \frac{b\sqrt{6}}{3}$ .

Korzystamy z twierdzenia Pitagorasa w trójkątach prostokątnych  $EOS$  i  $BOS$ , skąd otrzymujemy układ równań:

$$\begin{cases} H^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \left(\frac{b\sqrt{6}}{3}\right)^2 \\ H^2 + \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 = b^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 25 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \left(\frac{b\sqrt{6}}{3}\right)^2 \\ 25 + \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 = b^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 25 + \frac{a^2}{4} = \frac{2b^2}{3} \\ 25 + \frac{a^2}{2} = b^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 300 + 3a^2 = 8b^2 \\ 50 + a^2 = 2b^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b^2 = 75 \\ a^2 = 100 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b = 5\sqrt{3} \\ a = 10 \end{cases}$$

Stąd pole  $P$  podstawy  $ABCD$  ostrosłupa jest równe  $P = a^2 = 100$ , więc objętość ostrosłupa jest równa:  $V = \frac{1}{3} \cdot 100 \cdot 5 = \frac{500}{3}$ .

### Schemat punktowania

**Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania ..... 1 p.**

Zdający

- zastosuje twierdzenie Pitagorasa w trójkącie  $SOC$

albo

- zastosuje twierdzenie Pitagorasa w trójkącie  $SOE$ ,

albo

- zastosuje twierdzenie cosinusów w trójkącie  $BFD$ ,

albo

- zapisze funkcję trygonometryczną kąta ostrego w trójkącie  $OBF$ ,

albo

- zapisze proporcję wynikającą z podobieństwa trójkątów  $SEC$  i  $BCF$ ,

albo

- zapisze proporcję wynikającą z podobieństwa trójkątów  $SOC$  i  $OFC$

i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

*Uwaga:*

Jeżeli zdający zapisze związki, z których można obliczyć długość krawędzi podstawy lub długość przekątnej podstawy ostrosłupa, ale pominie jedno równanie potrzebne do zakończenia obliczeń, to otrzymuje **2 punkty**.

**Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp** ..... **3 p.**

Zdający zapisze układ równań, z którego można obliczyć długość krawędzi podstawy lub długość przekątnej podstawy ostrosłupa i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania** ..... **4 p.**

Zdający zapisze równanie z jedną niewiadomą oznaczającą wielkość, która pozwala obliczyć pole podstawy ostrosłupa i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

**Rozwiązanie prawie pełne** ..... **5 p.**

Zdający

- obliczy długość krawędzi podstawy lub długość przekątnej podstawy ostrosłupa

albo

- obliczy długość krawędzi podstawy lub długość przekątnej podstawy ostrosłupa, popełniając błędy rachunkowe i konsekwentnie do tego obliczy objętość ostrosłupa.

**Rozwiązanie pełne** ..... **6 p.**

Zdający obliczy objętość ostrosłupa:  $V = \frac{500}{3}$ .

*Uwagi:*

1. Jeżeli zdający rozpatruje inną bryłę, np. ostrosłup, którego podstawą nie jest kwadrat albo ostrosłup, którego ściany boczne są trójkątami równobocznymi, to otrzymuje **0 punktów**.

2. Jeżeli zdający błędnie interpretuje kąt między sąsiednimi ścianami bocznymi, ale przy korzystaniu z własności figur, w których ten kąt nie występuje, wykazuje się innymi umiejętnościami matematycznymi, to otrzymuje co najwyżej **1 punkt**.

3. Jeżeli zdający odczyta wartość  $\sin \sphericalangle BFO = \sin 60^\circ$  z tablic i wykona obliczenia na przybliżeniach, to otrzymuje co najwyżej **5 punktów**.

**Zadanie 9. (0–3)**

V. Rozumowanie i argumentacja.	7. Planimetria. Zdający znajduje związki miarowe w figurach płaskich, także z zastosowaniem trygonometrii (7.c).
--------------------------------	--

**Przykładowe rozwiązanie**

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku, niech ponadto  $r_s$  oznacza promień okręgu o środku w punkcie  $S$  i średnicy  $AB$ .

Wtedy  $|AB| = 2(|AK| + |LB|)$  oraz  $r_s = |AS| = \frac{1}{2}|AB|$  i  $|KS| = \frac{1}{4}|AB| = \frac{1}{2}r_s$ .

Trójkąt  $KLM$  jest trójkątem równoramiennym, którego podstawą jest odcinek  $KL$ . Punkt  $S$  jest środkiem odcinka  $KL$ .

Zatem punkty  $K, S, M$  są wierzchołkami trójkąta prostokątnego, w którym

$$|KS|^2 + |MS|^2 = |KM|^2 \text{ przy czym } |MS| = \frac{1}{2}|AB| - r = r_s - r$$

oraz

$$|KM| = \frac{1}{4}|AB| + r = \frac{1}{2}r_s + r,$$

Stąd mamy kolejno:

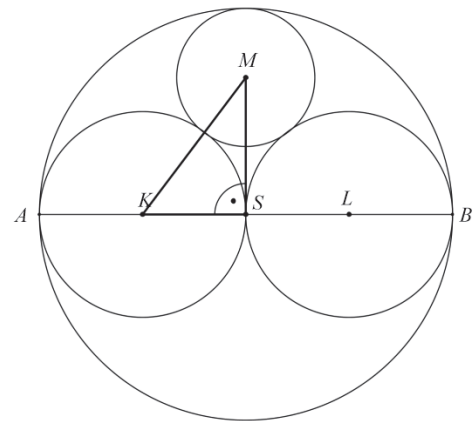
$$\left(\frac{1}{2}r_s\right)^2 + (r_s - r)^2 = \left(\frac{1}{2}r_s + r\right)^2,$$

$$\frac{1}{4}r_s^2 + r_s^2 - 2r_s \cdot r + r^2 = \frac{1}{4}r_s^2 + r_s \cdot r + r^2,$$

$$r_s^2 = 3r_s \cdot r.$$

Po wykorzystaniu zależności  $\frac{1}{2}|AB| = r_s$  otrzymujemy:  $\frac{3r}{\frac{1}{2}|AB|} = 1$ .

Zatem  $r = \frac{1}{6}|AB|$ , co kończy dowód.



**Schemat punktowania**

**Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp ..... 1 p.**

Zdający zauważy, że trójkąt  $KSM$  jest trójkątem prostokątnym i zapisze długości boków tego trójkąta

- w zależności od długości odcinka  $AB$ :

$$|KS| = \frac{1}{4}|AB|, |MS| = \frac{1}{2}|AB| - r, |KM| = \frac{1}{4}|AB| + r$$

albo

- w zależności od promienia  $r_s$ :

$$|KS| = \frac{1}{2}r_s, |MS| = r_s - r, |KM| = \frac{1}{2}r_s + r \text{ oraz } \frac{1}{2}|AB| = r_s.$$

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania ..... 2 p.**

Zdający zapisze równanie wynikające z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta  $KSM$ ,

$$\text{np. } \left(\frac{1}{2}r_s\right)^2 + (r_s - r)^2 = \left(\frac{1}{2}r_s + r\right)^2,$$

i przekształci do postaci umożliwiającej wyznaczenie szukanej zależności np.  $r_s^2 = 3r_s \cdot r$ .

**Rozwiązanie pełne ..... 3 p.**

Zdający wykaże, że  $r = \frac{1}{6}|AB|$ .

**Zadanie 10. (0–5)**

III. Modelowanie matematyczne.	10. Elementy statystyki opisowej. Teoria prawdopodobieństwa i kombinatoryka. Zdający wykorzystuje wzory na liczbę permutacji, kombinacji i wariacji do zliczania obiektów w sytuacjach kombinatorycznych oraz wykorzystuje własności prawdopodobieństwa i stosuje twierdzenie znane jako klasyczna definicja prawdopodobieństwa do obliczania prawdopodobieństw zdarzeń (R10, 10.d).
--------------------------------	--

**Przykładowe rozwiązanie**

Obliczymy moc zbioru wszystkich zdarzeń elementarnych:  $|\Omega| = \binom{20}{3} = 1140$ .

Zdarzenie  $A$  polega na tym, że co najmniej dwie z wylosowanych kul są tego samego koloru.

Ustalamy moc zdarzenia  $A$ :  $|A| = \binom{9}{2} \cdot \binom{11}{1} + \binom{9}{2} \cdot \binom{11}{1} + \binom{2}{2} \cdot \binom{18}{1} + \binom{9}{3} \cdot \binom{11}{0} + \binom{9}{3} \cdot \binom{11}{0} = 978$ .

Obliczamy szukane prawdopodobieństwo, korzystając z klasycznej definicji prawdopodobieństwa:

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{978}{1140} = \frac{163}{190}.$$

**Schemat punktowania**

**Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania ..... 1 p.**

Zdający

- zapisze moc zbioru wszystkich zdarzeń elementarnych:  $|\Omega| = \binom{20}{3}$

albo

- zapisze moc zbioru zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu  $A$  lub zdarzeniu przeciwnemu do  $A$ :

$$|A| = \binom{9}{2} \cdot \binom{11}{1} \cdot 2 + \binom{2}{2} \cdot \binom{18}{1} + \binom{9}{3} \cdot \binom{11}{0} \cdot 2 \quad \text{lub} \quad |A^c| = \binom{9}{1} \cdot \binom{11}{1} \cdot \binom{2}{1},$$

albo

- narysuje drzewo ilustrujące przebieg doświadczenia (na rysunku muszą wystąpić wszystkie istotne gałęzie dla danego zdarzenia  $A$  lub dla zdarzenia do niego przeciwnego  $A^c$ ).

**Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp ..... 2 p.**

Zdający

- zapisze moc zbioru wszystkich zdarzeń elementarnych:  $|\Omega| = \binom{20}{3}$  i moc zbioru zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu  $A$  lub zdarzeniu przeciwnemu do  $A$ :  
 $|A| = \binom{9}{2} \cdot \binom{11}{1} \cdot 2 + \binom{2}{2} \cdot \binom{18}{1} + \binom{9}{3} \cdot \binom{11}{0} \cdot 2$  lub  $|A^c| = \binom{9}{1} \cdot \binom{11}{1} \cdot \binom{2}{1}$
- narysuje drzewo ze wszystkimi istotnymi gałęziami i zapisze prawdopodobieństwa na wszystkich istotnych odcinkach jednego z etapów lub na jednej z istotnych gałęzi.

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania ..... 3 p.**

Zdający

- obliczy moc zbioru wszystkich zdarzeń elementarnych:  $|\Omega| = 1140$  i moc zbioru zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu  $A$  lub zdarzeniu przeciwnemu do  $A$ :  
 $|A| = 978$  lub  $|A^c| = 162$

albo

- obliczy prawdopodobieństwo wzdłuż jednej istotnej gałęzi: np.  $\frac{9}{20} \cdot \frac{9}{19} \cdot \frac{2}{18}$ .

**Rozwiązanie zadania do końca, lecz z usterkami, które nie przekreślają poprawności rozwiązania (np. błędy rachunkowe) ..... 4 p.**

Zdający

- obliczy prawdopodobieństwo zdarzenia przeciwnego do zdarzenia  $A$ :  
 $\frac{9}{20} \cdot \frac{9}{19} \cdot \frac{2}{18} \cdot 6 = \frac{81}{570}$  i nie obliczy prawdopodobieństwa zdarzenia  $A$

albo

- obliczy prawdopodobieństwo zdarzenia  $A$  z błędami rachunkowymi.

**Rozwiązanie pełne ..... 5 p.**

Zdający obliczy prawdopodobieństwo zdarzenia  $A$ :  $P(A) = \frac{489}{570}$ .

### Zadanie 11. (0–3)

III. Modelowanie matematyczne.	10. Elementy statystyki opisowej. Teoria prawdopodobieństwa i kombinatoryka. Zdający wykorzystuje wzory na liczbę permutacji, kombinacji i wariacji do zliczania obiektów w sytuacjach kombinatorycznych (R10).
--------------------------------	---

#### Przykładowe rozwiązania

##### I sposób

Miejsce dla cyfry 1 wybieramy na  $\binom{10}{3}$  sposobów. Na pozostałych siedmiu miejscach rozmieszczamy cyfry 2 lub 3 w dowolnym porządku na  $2^7$  sposobów. Stosujemy regułę mnożenia i otrzymujemy

$$\binom{10}{3} \cdot 2^7 = 120 \cdot 128 = 15360$$

różnych liczb dziesięciocyfrowych, które można zapisać za pomocą cyfr 1, 2, 3, w zapisie których cyfra 1 występuje w dokładnie trzy razy.

##### II sposób

Rozpatrzmy trzy rozłączne przypadki, w zależności od tego, jaka cyfra została zapisana na pierwszym miejscu.

1. Jeżeli na pierwszym miejscu jest cyfra 1, to miejsce dla pozostałych dwóch jedynek wybieramy na  $\binom{9}{2}$  sposobów, na pozostałych siedmiu miejscach rozmieszczamy cyfrę 2 lub cyfrę 3 w dowolnym porządku na  $2^7$  sposobów. Stosujemy regułę mnożenia i otrzymujemy

$$1 \cdot \binom{9}{2} \cdot 2^7 = 36 \cdot 128 = 4608$$

liczb dziesięciocyfrowych, które można zapisać za pomocą cyfr 1, 2, 3, w których zapisie cyfra 1 występuje w dokładnie trzy razy, przy czym na pierwszym miejscu jest cyfra 1.

2. jeżeli na pierwszym miejscu jest cyfra 2, to miejsce dla trzech jedynek wybieramy na  $\binom{9}{3}$  sposobów, na pozostałych sześciu miejscach rozmieszczamy cyfrę 2 lub cyfrę 3 w dowolnym porządku na  $2^6$  sposobów. Stosujemy regułę mnożenia i otrzymujemy

$$1 \cdot \binom{9}{3} \cdot 2^6 = 84 \cdot 64 = 5376$$

liczb dziesięciocyfrowych, które można zapisać za pomocą cyfr 1, 2, 3, w których zapisie cyfra 1 występuje w dokładnie trzy razy, przy czym na pierwszym miejscu jest cyfra 2.

3. (rozumowanie analogiczne jak w p. 2.). Jeżeli na pierwszym miejscu jest cyfra 3, to miejsce dla trzech jedynek wybieramy na  $\binom{9}{3}$  sposobów, na pozostałych sześciu miejscach rozmieszczamy cyfrę 2 lub cyfrę 3 w dowolnym porządku na  $2^6$  sposobów. Stosujemy regułę mnożenia i otrzymujemy

$$1 \cdot \binom{9}{3} \cdot 2^6 = 84 \cdot 64 = 5376$$

liczb dziesięciocyfrowych, które można zapisać za pomocą cyfr 1, 2, 3, w zapisie których cyfra 1 występuje w dokładnie trzy razy, przy czym na pierwszym miejscu jest cyfra 3.

Sumujemy liczby powstałe w każdym z trzech przypadków i otrzymujemy:

$$4608 + 2 \cdot 5376 = 15360$$

liczb dziesięciocyfrowych zapisanych wyłącznie za pomocą cyfr 1, 2, 3, w zapisie których cyfra 1 występuje dokładnie trzy razy.

### III sposób

Rozpatrzmy osiem rozłącznych przypadków, wyczerpujących wszystkie możliwości zapisu liczby dziesięciocyfrowej za pomocą cyfr 1, 2, 3, w których zapisie cyfra 1 występuje dokładnie trzy razy:

1. w zapisie tej liczby występują 3 jedynki i 7 trójek, wtedy takich liczb jest  $\frac{10!}{3! \cdot 7!} = 120$ ,
2. w zapisie tej liczby występują 3 jedynki, 1 dwójka i 6 trójek, wtedy takich liczb jest  $\frac{10!}{3! \cdot 6!} = 840$ ,
3. w zapisie tej liczby występują 3 jedynki, 2 dwójki i 5 trójek, wtedy takich liczb jest  $\frac{10!}{3! \cdot 2! \cdot 5!} = 2520$ ,
4. w zapisie tej liczby występują 3 jedynki, 3 dwójki i 4 trójki, wtedy takich liczb jest  $\frac{10!}{3! \cdot 3! \cdot 4!} = 4200$ ,
5. w zapisie tej liczby występują 3 jedynki, 4 dwójki i 3 trójki, wtedy takich liczb jest  $\frac{10!}{3! \cdot 4! \cdot 3!} = 4200$ ,
6. w zapisie tej liczby występują 3 jedynki, 5 dwójek i 2 trójki, wtedy takich liczb jest  $\frac{10!}{3! \cdot 5! \cdot 2!} = 2520$ ,
7. w zapisie tej liczby występują 3 jedynki, 6 dwójek i 1 trójka, wtedy takich liczb jest  $\frac{10!}{3! \cdot 6!} = 840$ ,
8. w zapisie tej liczby występują 3 jedynki i 7 dwójek, wtedy takich liczb jest  $\frac{10!}{3! \cdot 7!} = 120$ .

Sumujemy liczby otrzymane w każdym przypadku i otrzymujemy:

$$2 \cdot (120 + 840 + 2520 + 4200) = 2 \cdot 7680 = 15360$$

różnych liczb dziesięciocyfrowych zapisanych wyłącznie za pomocą cyfr 1, 2, 3, w zapisie których cyfra 1 występuje dokładnie trzy razy.

### Schemat punktowania

**Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp ..... 1 p.**

Zdający zapisze, że:

- miejsce dla cyfry 1 można wybrać na  $\binom{10}{3}$  sposobów

albo

- miejsca dla cyfr 2 lub 3 można wybrać na  $\binom{10}{7}$  sposobów,

albo

- cyfry 2 lub 3 można rozmieścić na  $2^7$  sposobów,

albo

- jeżeli cyfra 1 jest na ustalonym (np. pierwszym) miejscu, to pozostałe dwie cyfry 1 można rozmieścić na  $\binom{9}{2}$  sposobów,

albo

- jeżeli na ustalonym miejscu stoi jedna z cyfr 2 lub 3, to trzy cyfry 1 można rozmieścić na  $\binom{9}{3}$  sposobów,

albo

- jeżeli cyfry 1 stoją na ustalonych trzech miejscach, to jeśli w liczbie występuje  $n$  cyfr 2, to cyfry 2 i 3 można rozmieścić na  $\binom{7}{n}$  sposobów dla przynajmniej jednej konkretnej liczby  $n$ ,

albo

- jest 8 rozłącznych przypadków wyczerpujących wszystkie możliwości zapisu liczby dziesięciocyfrowej za pomocą cyfr 1, 2, 3, w których zapisie cyfra 1 występuje dokładnie trzy razy

i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania ..... 2 p.**

Zdający

- zapisze, że liczba rozpatrywanych liczb dziesięciocyfrowych jest równa np.  $\binom{10}{3} \cdot 2^7$

albo

- zapisze, ile jest liczb w każdym z rozpatrywanych przypadków wyczerpujących wszystkie możliwości zapisu liczby dziesięciocyfrowej za pomocą cyfr 1, 2, 3, w których zapisie cyfra 1 występuje dokładnie trzy razy,

albo

- zapisze osiem rozłącznych przypadków wyczerpujących wszystkie możliwości zapisu liczby dziesięciocyfrowej za pomocą cyfr 1, 2, 3, w których zapisie cyfra 1 występuje dokładnie trzy razy oraz w przynajmniej jednym przypadku zapisze liczbę takich liczb, np.  $\binom{10}{3} \cdot 1$

i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

**Rozwiązanie pełne ..... 3 p.**

Zdający

- zapisze, że jest  $\binom{10}{3} \cdot 2^7 = 15360$  liczb dziesięciocyfrowych zapisanych wyłącznie za pomocą cyfr 1, 2, 3, w zapisie których cyfra 1 występuje dokładnie trzy razy

albo

- zsumuje liczby otrzymane w każdym z rozpatrywanych przypadków wyczerpujących wszystkie możliwości zapisu liczby dziesięciocyfrowej za pomocą cyfr 1, 2, 3, w których zapisie cyfra 1 występuje dokładnie trzy razy i zapisze, że jest ich 15360.

*Uwagi:*

1. Rozwiązanie uznajemy za pełne, jeżeli zdający zapisze liczbę rozpatrywanych liczb dziesięciocyfrowych bez użycia symbolu Newtona.
2. Jeżeli zdający w swoim rozwiązaniu przedstawia zapisy, dla których brak bezpośredniej interpretacji kombinatorycznej i zapisom tym nie towarzyszą stosowne objaśnienia, to nie może otrzymać maksymalnej liczby punktów, przy czym za rozwiązanie, zawierające



- jedynie zapisy pojedynczych liczb lub symboli Newtona (typu 120, 128,  $\binom{10}{7}$ ), bez stosownych objaśnień, zdający otrzymuje **0 punktów**, a za rozwiązanie, zawierające jedynie zapisy działań na liczbach (typu  $120 \cdot 128 = 15360$ ), bez stosownych objaśnień zdający może otrzymać co najwyżej **1 punkt**.
3. Jeżeli zdający przedstawia rozwiązanie, w którym części zapisanych liczb lub działań na liczbach nie towarzyszą stosowne objaśnienia, to za takie rozwiązanie może otrzymać co najwyżej **2 punkty**.
4. Zdający może skorzystać ze wzoru dwumianowego Newtona i zapisać:

$$\binom{10}{3} \cdot \left\{ \binom{7}{7} + \binom{7}{6} + \binom{7}{5} + \binom{7}{4} + \binom{7}{3} + \binom{7}{2} + \binom{7}{1} + \binom{7}{0} \right\} = \binom{10}{3} \cdot 2^7 = 120 \cdot 128 = 15360.$$